

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	I
Abbildungsverzeichnis	II
Symbolverzeichnis.....	III
1 Einleitung	
1.1 Motivation.....	1
1.2 Aufgabenstellung	2
1.3 Vorgehen.....	2
2 Ausgangslage	
2.1 Erkennung des Problems.....	3
2.2 Behandlung der Inneren Randbedingung „Wehr“	4
2.2.1 Massenflux.....	4
2.2.2 Momentumflux	6
2.2.3 Druckflux	6
3 Theoretische Grundlagen	
3.1 Verwendete Gleichungen	7
3.1.1 Die Navier-Stokes Gleichungen	7
3.1.2 Flachwassergleichungen	7
3.1.3 Gültigkeitsbereich der Flachwassergleichungen	8
3.2 Diskretisierung.....	8
3.2.1 Flachwassergleichungen.....	9
3.2.2 Rechengebiet (Gittermodell)	10
3.2.3 Zeit	12
3.3 Randbedingungen	12
3.3.1 Innere Randbedingungen.....	13
4 Lösungsansätze	
4.1 Der Lösungsprozess	13
4.2 Konzeptstudium	14
4.2.1 Kriterien der Konzeptbewertung.....	14
4.2.2 Bewertungsmatrix und Wahl des Bestkonzepts	16
4.3 Variantenstudium.....	17
4.3.1 Ablauf.....	17
4.3.2 Das Kontrollvolumen.....	17
4.3.3 Massenflux.....	18

4.3.4	Ermittlung von Eingabegrößen	20
4.3.5	Momentumflux	25
4.3.6	Druckflux	28
5	Validierung	
5.1	Kalibrierung des Abflussbeiwertes.....	33
5.2	Sensitivitätsanalyse	36
5.2.1	Bemessungsabflusshöhe	36
5.2.2	Reibungsbeiwert	37
6	Praxisanwendung	
6.1	Einleitung.....	39
6.2	Flusskraftwerk 1	39
6.2.1	Betriebslastfall	39
6.2.2	Hochwasserlastfall.....	40
6.3	Flusskraftwerk 2	41
7	Lösungsvorgehen für Innere Randbedingungen	
7.1	Allgemeines Lösungsvorgehen für Innere Randbedingungen.....	43
7.2	Übertragung einer Implimentierung auf eine andere.....	44
8	Schlussbemerkungen.....	45
9	Anhang	
9.1	Abhängigkeit des Momentumfluxes von der Geschwindigkeitsverteilung	46
9.2	Skalierung des gemittelten Momentumfluxes	49
	Literaturverzeichnis	50

Zusammenfassung

An der VAW wird mit *BASEMENT* eine numerische Software für die Berechnung des hydraulischen und flussmorphologischen Verhaltens von Fliessgewässern kontinuierlich weiterentwickelt. Das 2D Strömungsfeld wird mittels der tiefengemittelten Flachwassergleichungen gelöst. Diese Gleichungen gewährleisten, unter gewissen Annahmen, die Erhaltung von Masse und Impuls. Wo die Grundgleichungen ihrer Gültigkeit lokal verlieren, z.B. bei einem Wehr oder Schütze, sollte ein Ersatzmodell zum Einsatz kommen. In *BASEMENT* werden solche hydraulische Bauwerke als Innere Randbedingungen modelliert.

Die Ermittlung des Impulsflusses durch die Innere Randbedingungen wird in dieser Masterarbeit untersucht. In der Ausgangslage ist dieser Impulsfluss aus tiefengemittelten Daten berechnet und durch abnormale Wasserspiegellagen vor den Inneren Randbedingungen hat diese Lösung sich als ungenügend gezeigt. Mit der Annahme von Druck und Geschwindigkeitsverteilungen, die dem Strömungszustand lokal vor der Inneren Randbedingung beschreiben, wird in dieser Arbeit der Impulsfluss modelliert. Somit werden die tiefengemittelten Daten mit Informationen in der dritten Dimension ergänzt. Das Verfahren ist am Beispiel eines Standardüberfalles entwickelt und bei der Validierung und Berechnung von zwei Praxisfällen liefert es vielversprechenden Resultaten.

Auch werden drei Ansätze für die Ermittlung der Eingabegrößen für die Innere Randbedingung dargestellt. Am Schluss wird eine konkrete Vorgehensweise für die Modellierung von Inneren Randbedingungen in tiefengemittelten Modellen angegeben.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1. Vergleich einer Numerische Simulation mit experimentellen Daten.....	3
Abbildung 2. Definition der verwendeten Variablen	4
Abbildung 3. Reduktionsfaktor für unvollkommenen Abfluss	5
Abbildung 4. Zellenmittelpunktmethode und Zelleneckpunktmethode	9
Abbildung 5. Google Earth Luftaufnahme und Gittermodell eines Flusskraftwerks.....	10
Abbildung 6. Strukturiertes Gitter.....	11
Abbildung 7. Unstrukturiertes Gitter.....	11
Abbildung 8. Randbedingungen für ein Modell einer Versuchsrinne	13
Abbildung 9. Das Kontrollvolumen	17
Abbildung 10. Definition der Variablen der Abflussgleichungen	19
Abbildung 11. Durchflussreduktion für ein OGEE-Wehr.....	20
Abbildung 13. Massgebendes Element wird in der Eingabedatei definiert	21
Abbildung 14. Welle kommt an das Wehr	22
Abbildung 15. Aktive Ermittlung des massgebenden Elements.....	22
Abbildung 16. Diagramm zur Beschreibung der Ermittlung des massgebenden Elements....	23
Abbildung 17. Definition für Gleichung 15.....	23
Abbildung 18. Ein Gitter aus einer kommerziellen Simulation.....	26
Abbildung 19. Definition für Gleichung 16.....	25
Abbildung 20. Darstellung des hydrostatischen Drucks.....	28
Abbildung 21. Druckverlauf oberhalb des Wehrscheitels.....	28
Abbildung 22. Ein Ansatz für die Ermittlung des Drucks auf das Wehr.....	30
Abbildung 23. Ein Ansatz für die Ermittlung des Drucks auf das Wehr.....	30
Abbildung 24. Stützkraftsatz auf das Kontrollvolumen.....	31
Abbildung 26. Validierung des Modells	33
Abbildung 27. Kalibrierung des Abflussbeiwertes	34
Abbildung 28. Kalibriertes Modell	35
Abbildung 29 Verlauf von C_d als Funktion der dimensionslosen Abflusshöhe.....	36
Abbildung 30. Sensitivitätsanalyse. Die X-Achse ist logarithmisch skaliert.....	37
Abbildung 31. Abhängigkeit des Wasserspiegels von dem Manningsbeiwert.....	38
Abbildung 32. Luftaufnahme aus Google Earth und ein Gitter von dem Kraftwerk	39
Abbildung 33. Resultate aus der Simulierung des Betriebslastfalls.....	40
Abbildung 34. Resultate aus der Simulierung des Betriebslastfalls.....	41
Abbildung 35. Der zweite Praxisfall.....	41
Abbildung 36. Resultate aus der Simulierung des zweiten Praxisfalls	42
Abbildung 37. Kontrollvolumen und Erhaltungsgrößen für eine allgemeine Lösung.....	42

Symbolverzeichnis

Lateinische Symbole:

A	Fläche einer Edge eines Kontrollvolumens
c	Wellengeschwindigkeit
C_d	Abflussbeiwert
CFL	Courant Zahl
F	Kraft
F_{visc}	Viskositätskraft
f	Volumenkraft
g	Erdbeschleunigung
H	Energiehöhe
H_D	Bemessungsenergiehöhe
h	Abflusstiefe im Oberwasser
h_u	Abflusstiefe im Unterwasser
K_m	Korrekturfaktor für den Momentumflux
L	Länge einer Edge eines Elementes
\dot{m}	Spezifischer Momentumflux
\dot{p}	spezifischer Momentumflux in Folge von Druckkraft
p	Druck
Q	Abfluss
q	Spezifischer Abfluss
q_D	Spezifischer Bemessungsabfluss
q_s^*	Unvollkommener spezifischer Abfluss nach Skogerboe et alii (1967)
q_s	Unvollkommener spezifischer Abfluss
r	Länge Dimensionslose Wehrkrümmung
T	Verformungstensor
Δt	Zeitschritt
t	Zeit
u	Geschwindigkeit in x -Richtung
v	Geschwindigkeit in y -Richtung
w	Wehrhöhe
x	Koordinate in die horizontale Richtung, Ursprung auf dem Wehrscheitel. Positiv in die Fließrichtung

y Abflusshöhe über dem Wehrscheitel

Z_B Sohlkote

z Koordinate in die vertikale Richtung, Ursprung auf dem Wehrscheitel

Griechische Symbole:

γ Raumgewicht von Wasser

λ Probegrösse

$\mu \cdot$ Abflussbeiwert nach Poleni

ρ Dichte von Wasser

σ_{uv} Abflussreduktionsfaktor für den unvollkommenen Überfall

τ_{Bx} Schubspannung an der Sohle in x -Richtung

τ_{By} Schubspannung an der Sohle in y -Richtung

χ Dimensionslose Energiehöhe

Ω Fläche eines Elements

Sonstiges:

∇ Divergenz

$\frac{D}{Dt}$ Substantielle Ableitung

1 Einleitung

1.1 Motivation

Gewässern steht immer weniger Raum zur Verfügung und damit steigen die Anforderungen auf die Fachgebiete die sich damit beschäftigen. Die Zielsetzungen für die Eingriffe werden auch immer komplizierter. Heutzutage wird versucht, den Hochwasserschutz in Mehrfachnutzungsprojekte zu integrieren in denen die Freizeitgestaltung und ökologische Ansprüche prominent sind. Dies erfordert eine möglichst übergreifende Betrachtung. Eindämmung der Flüsse und Bäche in Gerinnen mit einfachen geometrischen Formen gehören zur Vergangenheit und mit den naturnahen, aber trotzdem gezähmten Gerinnen wird die Gestaltung der Flussgebiete noch schwieriger. Flüsse sind auch komplizierte und empfindliche Systeme. Ein lokaler Eingriff wirkt sich meistens auf weite Teile eines Flussgebietes aus und infolge der hohen Kosten die ein entsprechend grosses physikalisches Modell verursachen würde, wird die Numerische Simulation immer wichtiger.

1.2 Aufgabenstellung

An der VAW wird mit BASEMENT eine numerische Software für die Berechnung des hydraulischen und flussmorphologischen Verhaltens von Fließgewässern kontinuierlich weiterentwickelt. Das horizontale Strömungsfeld wird mittels der tiefengemittelten Flachwassergleichungen gelöst. Diese Gleichungen sind nach dem Prinzip der finiten Volumen Methode diskretisiert und gewährleisten die Erhaltung von Masse und Impuls in zwei Dimensionen.

Bei hydraulischen Bauwerken wie einem überströmten Wehr können die Grundannahmen der Flachwassergleichungen verletzt werden. Solchen Bedingungen können mit einem Ersatzmodell behandelt werden, das eine innere Randbedingung darstellt.

Im Rahmen dieser Masterarbeit sollen verschiedene Ansätze für solche inneren Randbedingungen formuliert, implementiert und anhand von Messdaten aus der Literatur validiert werden.

Die formulierten Ansätze sollen möglichst universell gültig sein, aber mit klar aufgezeigten Grenzen.

1.3 Vorgehen

Um die Aufgabe zu lösen wurde am Anfang die Ausgangslage analysiert. Nach einer Literaturstudie in den Bereichen Numerik, Programmierung und Wehrströmung wurde eine Untersuchung des Quellcode von Basement durchgeführt. Nach dem die Problematik abgeklärt wurde war die nächste Aufgabe möglichst viele Lösungsansätze zu formulieren. Die geeignetste davon wurde dann in einem Variantenstudium am Beispiel eines OGEE-Wehres (Standardüberfall) zu einer reifen Lösung entwickelt. Nach einer Validierung dieser Lösung mittels Vergleich zu experimentelle Daten wurde die Implementierung der Innere Randbedingung „OGEE“ Wehr auf zwei Praxisanwendungen probiert. Am Schluss wurde das ganze Vorgehen der Variantenstudie in einem Allgemeinen Lösungsvorgehen konkretisiert und bildet es die Hauptlösung der Arbeit.

2 Ausgangslage

2.1 Erkennung des Problems

Wird ein Gerinneabschnitt, der ein inneres Wehr hat, mit Basement simuliert, ist das Resultat häufig der folgende Wasserspiegelverlauf.

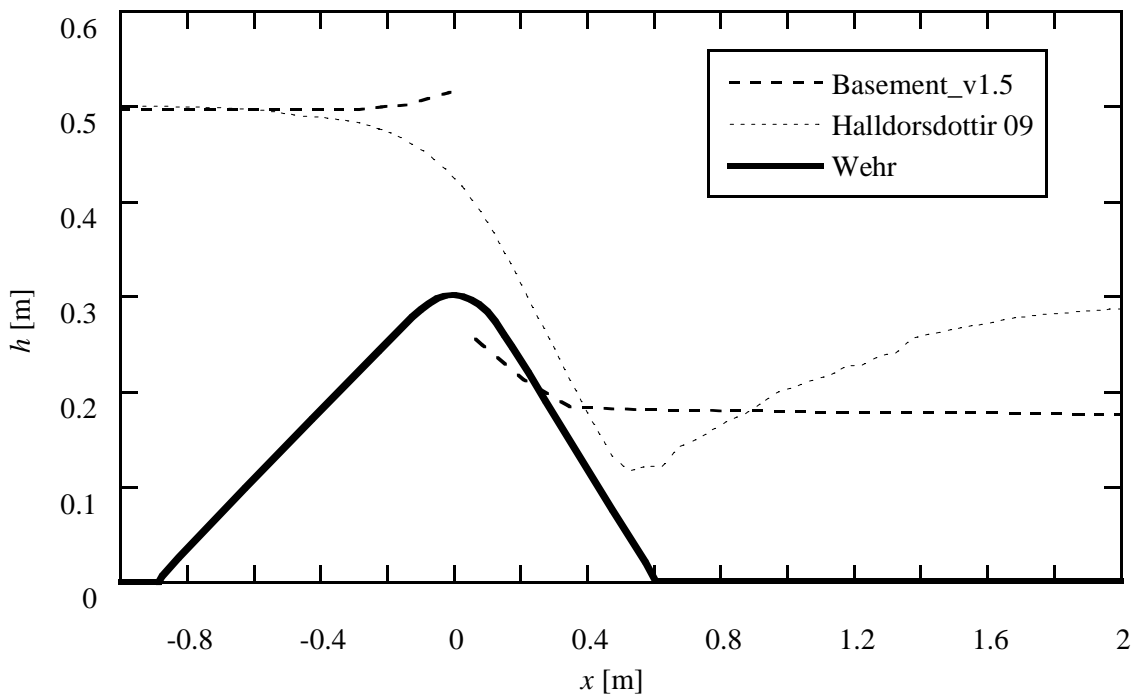


Abbildung 1. Vergleich einer Numerische Simulation mit experimentellen Daten.

In Abbildung 1 sind Resultate aus einem Versuch und einer numerischen Simulation verglichen. Der Versuch wurde im Frühjahr 2009 an der VAW durchgeführt (Halldorsdottir 2009). Das Zylinderwehr mit einer Höhe von 30.25 cm ist mit Rampen im Ober- und Unterwasser versehen und der spezifische Abfluss beträgt $184 \text{ m}^2/\text{s}$. Die numerische Simulation wurde auf einem Gitter mit 1.83 m Breite und 12 m Länge, bestehend aus 1'532 Elementen, mit der Version 1.5 von Basement durchgeführt. Als Kalibrierungsgrösse wurde der Poleni-Faktor verwendet. Die Wasserspiegel im Oberwasser trafen sich bei einem Poleni-Faktor von 0.6. Für Wehre dieser Art sollte dieser Wert aber deutlich höher liegen (Minor 2004). Hier ist zu erkennen, dass die Wasseroberfläche bei der numerischen Simulation gerade vor dem Wehr aufsteigt. Wie die Versuchsergebnisse zeigen, sollte sich die Wasseroberfläche nach unten krümmen. Der Grund dafür ist unter anderem die Saugwirkung der Stromfadenkrümmung gerade oberhalb des Wehres. Die Randbedingungen im Unterwasser waren bei beiden Versuchen zwar nicht identisch, allerdings war der Überströmungsvorgang davon nicht beeinflusst.

Die verwendeten Gleichungen in Basement sind die Flachwassergleichungen. Diese Gleichungen basieren auf gewissen Annahmen und haben daher einen beschränkten Gültigkeitsbereich. In dem Rechengebiet sorgt der Riemann-Solver für die Erfüllung der Grundgleichungen und breitet die Informationen der Randbedingungen aus. Bei einem Wehr z.B. werden die Annahmen der Grundgleichungen verletzt und die Erhaltungsgrößen Masse und Impuls, müssen mit einem Ersatzmodell berechnet werden.

2.2 Behandlung der Inneren Randbedingung „Wehr“

Die Innere Randbedingung „Wehr“ berechnet die zwei Erhaltungsgrößen

- Massenflux und
- Momentumflux.

Der Massenflux entspricht der Wassermasse respektive dem -volumen, das über das Wehr fließt. Der Momentumflux entspricht der Energie die die Zelle auf seinen Nachbarn erzeugt und setzt sich aus Impuls und Wasserdruck zusammen. Abbildung 2 definiert die Variablen die in den nächsten Abschnitten vorkommen.

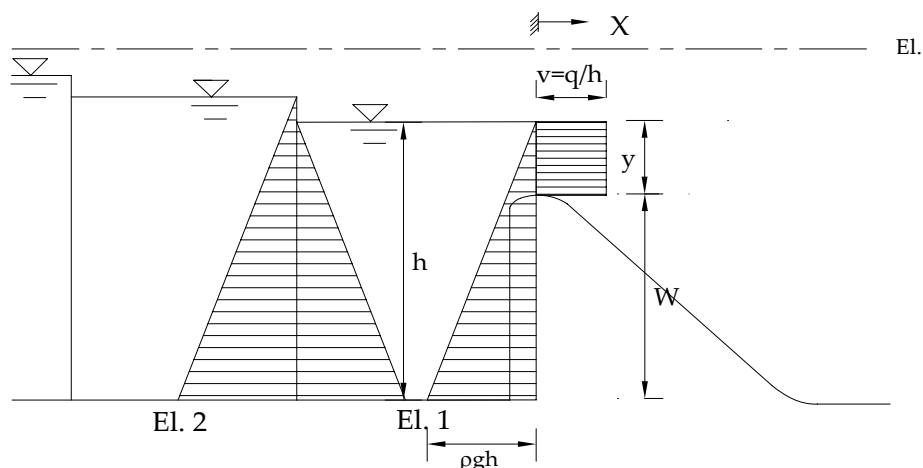


Abbildung 2. Definition der verwendeten Variablen

Dargestellt in Abbildung 2 ist eine Schnittzeichnung durch ein Wehr und drei oberwasserseitig liegende Zellen.

2.2.1 Massenflux

Der Massenflux wird nach der Wehrformel von Poleni-Weissbach ermittelt

$$q = \sigma_{wv} \cdot \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h^3} \quad (1)$$

Bei dieser Formel wird die Zulaufgeschwindigkeit im Oberwasser vernachlässigt und h wird gleich der Differenz zwischen Abflusstiefe in der Zelle am Rand des Wehres und der Wehrhöhe gesetzt. σ_{uv} ist ein Verminderungsfaktor für den unvollkommenen Abfluss und sein Betrag als Funktion von Ober- und Unterwassertiefe ist in Abbildung 3 zu sehen.

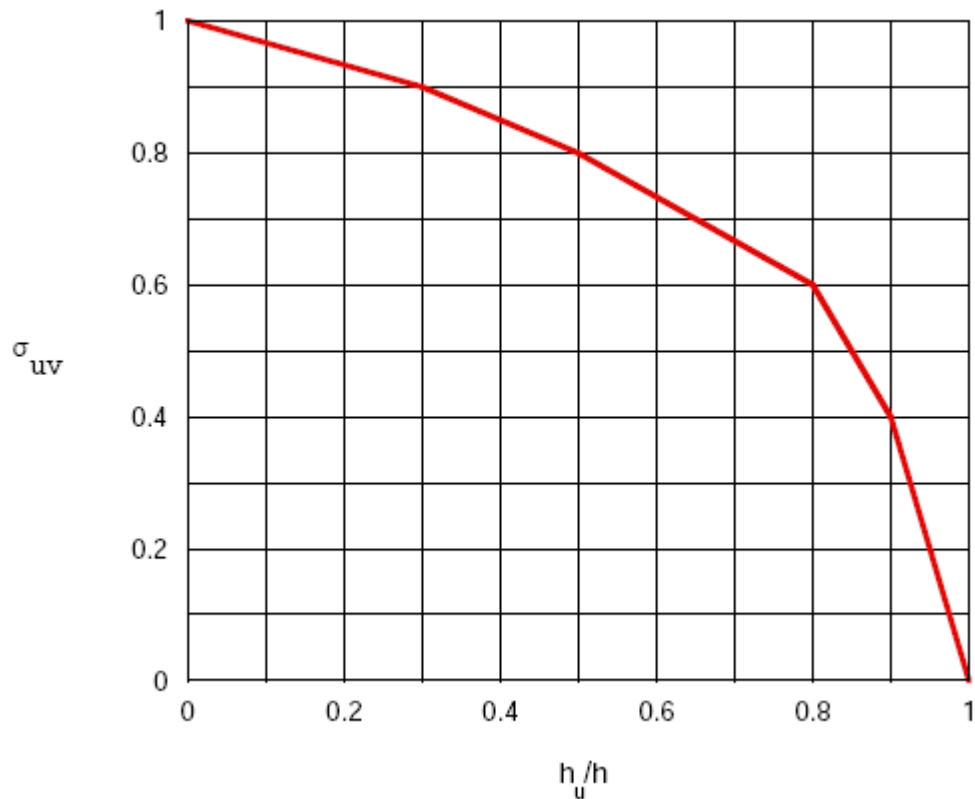


Abbildung 3. Reduktionsfaktor für unvollkommenen Abfluss
(Quelle: Fäh et alii, 2008).

Gemäss Bild 3 stellt sich der unvollkommene Abfluss ein, wenn der Wasserstand im Unterwasser die Wehrkrone erreicht. Der Verlauf von σ_{uv} ist aber massgeblich von der Wehrart abhängig (Bollrich 2007).

2.2.2 Momentumflux

Der Momentumflux über das Wehr wird berechnet zu

$$\dot{m} = F \cdot \frac{q^2}{h} \quad (2)$$

mit

$$F = \begin{pmatrix} 0 \rightarrow \frac{h}{w} < 0 \\ \frac{h}{w} \rightarrow 0 < \frac{h}{w} < 1 \\ 1 \rightarrow \frac{h}{w} > 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Kein Momentum wird ins Unterwasser transportiert. Unter dieser Annahme wird die ganze kinetische Energie des Wassers dissipiert. Das Wasser im Unterwasser des Wehres fließt daher nur durch das Gefälle und unter eigenem Gewicht ab.

2.2.3 Druckflux

Der Druck am Wehrrand wird als hydrostatisch zu

$$p = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h^2 \quad (4)$$

angenommen. Hier ist g die Erdbeschleunigung und h der Wasserstand der Zelle am Rand der inneren Randbedingung.

3 Theoretische Grundlagen

3.1 Verwendete Gleichungen

3.1.1 Die Navier-Stokes Gleichungen

Eine numerische Simulation ist ein numerisches Lösen partieller Differentialgleichungen. Die Navier-Stokes Gleichungen kapseln die physikalischen und dynamischen Eigenschaften von Fluida ein und gewährleisten die Konservierung des Impuls. Die Gleichung

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot T + \vec{f} \quad (5)$$

kann so interpretiert werden, dass die Änderung des Impulses eines Fluidteilchens entlang einer Stromlinie der Summe der äusseren Kräfte entspricht. Mit deren Anwendung kann ohne Approximation bis auf die kleinsten turbulenten Strukturen aufgelöst werden. Eine analytische Lösung ist aber nur für einfache Spezialfälle möglich und daher finden die Gleichungen ihre Hauptanwendung in der Numerik.

Der heutige Stand der Computertechnik erlaubt aber nur so kleine Berechnungsabschnitte für genaue Lösungen, dass diese für viele Zwecke von keiner Bedeutung sind. Durch verschiedene Vereinfachungen der Navier-Stokes Gleichungen entstanden die Berechnungsverfahren, die für strömungsdynamische Fragestellungen vorhanden sind. Die Vereinfachungen sind abhängig von dem gezielten Anwendungsbereich des Modells und z.B. kommen die Reduktion der räumlichen Dimensionen oder der Anzahl der betrachteten physikalischen Eigenschaften zur Frage.

3.1.2 Flachwassergleichungen

Die Flachwassergleichungen

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + g \left(\frac{\partial Z_B}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) = -\frac{1}{h} \frac{\tau_{Bx}}{\rho} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + g \left(\frac{\partial Z_B}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) = -\frac{1}{h} \frac{\tau_{By}}{\rho} \quad (7)$$

sind eine Vereinfachung der Navier-Stokes Gleichungen und es gibt hauptsächlich zwei Wege um sie zu erhalten. Einerseits können die Navier-Stokes Gleichungen über die Tiefe integriert werden, andererseits betrachtet man ein Kontrollvolumen und formuliert die Änderung des Impulses als die Summe der äusseren Kräfte. Für beide Fälle werden vertikale

Strömungskomponenten vernachlässigt und die Druckverteilung als Hydrostatisch angenommen.

Ein tiefengemitteltes Modell ist eine Reduktion von 3D auf 2D, in dem Informationen in der dritten Dimension kontinuierlich oder diskret in Funktion von den anderen zwei angegeben werden. Die Querstriche über den Variablen in Gleichungen 6 und 7 weisen darauf hin, dass gemittelte Geschwindigkeiten benutzt werden. Mit der Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}h)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}h)}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

bilden die tiefengemittelten Flachwassergleichungen ein linear unabhängiges Gleichungssystem für die Wassertiefe und Geschwindigkeit in zwei Dimensionen.

3.1.3 Gültigkeitsbereich der Flachwassergleichungen

Die Voraussetzungen für die Annahme einer hydrostatischen Druckverteilung sind nur gegeben, wenn die vertikale Beschleunigung der Fluidteilchen klein bleibt. Dies zeigt sich als ungekrümmte und parallele Strömungslinien. Bei instationären Abflüssen ist dies erfüllt wenn:

- die Amplitude einer Welle kleiner ist als die Wassertiefe und
- die Wellenlänge L viel grösser als die Wassertiefe h ist ($L/h > 20$).

Bei stationären Abflüssen kann diese Annahme auch verletzt werden, z.B. bei Diskontinuitäten oder abrupten Änderungen im Wasserspiegel oder Fließquerschnitt. Wehre, Schütze, Wasserfälle und Tosbecken sind Beispiele, wo stationäre Zustände keine hydrostatische Druckverteilung haben. Da der Momentumflux eine Funktion der Geschwindigkeit im Quadrat ist, kann er an Stellen, an denen die Geschwindigkeitsverteilung stark von der tiefengemittelten Geschwindigkeit abweicht nicht richtig ermittelt werden und die Flachwassergleichungen können die Impulserhaltung nicht gewährleisten.

3.2 Diskretisierung

Um ein Problem mit einem numerischen Verfahren lösen zu können, muss es erst in eine Form gebracht werden, die eine endliche und von Rechnern behandelbare Anzahl von Freiheitsgraden hat. Dieser Prozess nennt sich Diskretisierung. Die physikalische Welt weist eine grenzlose Komplexität auf und der kontinuierliche Raum und die kontinuierliche Zeit müssen in Schritten unterteilt werden. Nur für definierte Punkte dieser Diskretisierung sind Informationen über die Eigenschaften des Systems vorhanden.

3.2.1 Flachwassergleichungen

Partielle Differentialgleichungen beschreiben Änderungen der abhängigen Variablen als eine Funktion der Änderung der unabhängigen. Die Diskretisierung hat die Aufgabe die Gleichungen auf eine Form zu setzen, mit der ein Computer arbeiten kann.

Die Hauptmethoden der Diskretisierung sind

- die Finite-Differenzen-Methode (FD),
- das Finite-Volumen-Verfahren (FVM),
- die Finite-Elemente-Methode (FEM) und
- die Methode der Charakteristiken(MC).

Jedes dieser Verfahren hat seine Stärken und Schwächen und deshalb unterschiedliche Anwendungsbereiche. Die Finite Elemente-Methode ist zum Beispiel geeignet für Baustatik während die Methode der finiten Volumen ihre Hauptanwendung in der Strömungslehre bekommt.

Bei der Methode der finiten Volumen werden die verwendeten Gleichungen über ein Kontrollvolumen integriert, was die Erhaltung von Masse, Impuls oder Energie gewährleistet. Die Methode ist daher konservativ und das stellt sicher, dass die numerische Lösung, wenn konvergent, zu der korrekten Lösung konvergiert (Fäh et alii, 2008). Eine numerische Integration ist rechnerisch intensiv. Mit dem Gauss'schen Integralsatz kann diese Integration durch die Berechnung des Fluxes durch die Wände des Kontrollelements ersetzt werden. Die Kontrollvolumen sind durch Knoten des Rechengitters definiert und werden Elemente genannt. Bei der Finiten Volumen Methode (FVM) gibt es zwei Möglichkeiten für die Ermittlung der relevanten Grössen, nämlich die Zellenmittelpunktmethode und die Zelleneckpunktmethode.

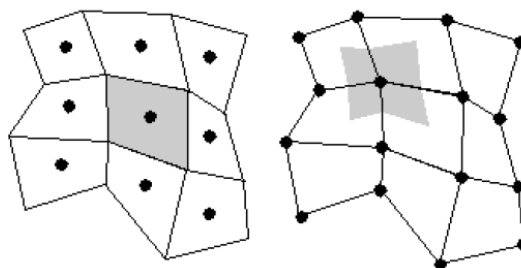


Abbildung 4. Zellenmittelpunktmethode (links) und Zelleneckpunktmethode (rechts).
(Quelle: Kinzelbach 2008)

Bei der Zellenmittelpunktmethode werden die abhängigen Variablen in der Mitte der Elemente positioniert während in den Zelleneckpunkten diese Grössen in den Knoten des

Elements zu finden sind. In Abbildung 4 ist der Geltungsbereich der Informationen in den Knoten grau dargestellt.

3.2.2 Rechengebiet (Gittermodell)

Durch die Erstellung eines Gittermodells werden Eigenschaften des kontinuierlichen Raums bis auf eine endliche Zahl von Punkten übersetzt. Je feiner die Unterteilung des Berechnungsgebietes ist, desto geringer wird der gewogene Approximationsfehler jedes Untergebietetes. Im Allgemeinen ist das Gitter eine Voraussetzung einer gut gelungenen Simulation. Wichtig ist dabei, den erforderlichen Genauigkeitsgrad zu schätzen, um den erforderliche Diskretisierungsgrad bestimmen zu können. Die entstandenen Modelle können 1D, 2D oder 3D sein. Eindimensionale Modelle sind eine Reihe von Querprofilen. Zweidimensional ist ein Gitter, das in einer Ebene liegt und die Knoten können mit einer Höheninformation ergänzt werden. Solche Gitter sind als „2.5 dimensional“ betrachtet. In Abbildung 5 ist ein solches Gittermodell dargestellt.

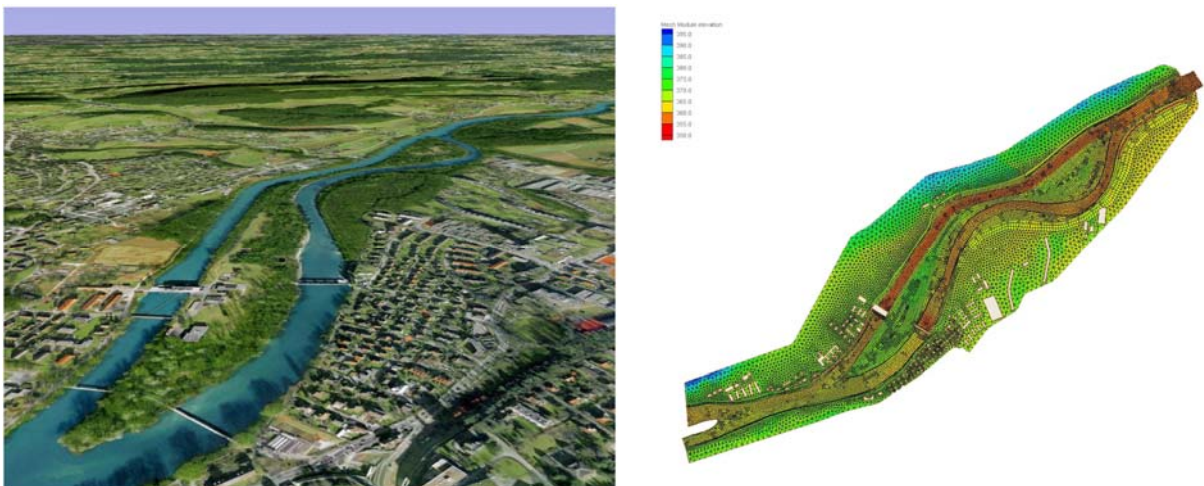


Abbildung 5. Google Earth Luftaufnahme (links) und Gittermodell (rechts) eines Flusskraftwerks.

Die Höheninformationen sind als Farben dargestellt. Links ist eine Luftaufnahme eines Flusskraftwerkes, das mit dem Gitter (rechts) nachgebildet wird. Auf dem Gitter kann mit den herrschenden Gleichungen schrittweise durch die Domäne gegangen werden.

Zwei Arten von Gittern kommen vor, strukturierte und unstrukturierte Netze. Diese unterscheiden sich in der Anordnung ihrer Elemente.

3.2.2.1 Strukturierte Gitter

Die geometrisch einfachsten Netze die vorkommen sind strukturierte Gitter. Sie können dadurch charakterisiert werden, dass die Unterteilungen in eine Raumdimension, in Bezug auf die andere, konstant ist. Somit kann jede Zelle in einem 2D Netz eindeutig mit zwei

Indizes gekennzeichnet werden. Orthogonalität ist keine Voraussetzung für ein strukturiertes Gitter.

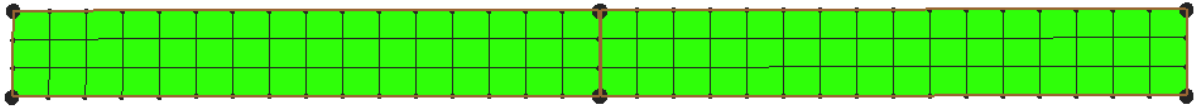


Abbildung 6. Strukturiertes Gitter.

In Abbildung 6 ist ein strukturiertes Gitter dargestellt. Der grösste Nachteil von unstrukturierten Gittern ist dass sie wenig flexibel sind.

3.2.2.2 Unstrukturierte Gitter

Bei den unstrukturierten Gittern ist die Anzahl der Nachbarn jeder Zelle nicht konstant und die Position der Knoten folgt in der Regel keinem Muster. Die Folge ist, dass die Zellen nicht mittels Indizes gekennzeichnet werden können und für sämtliche Knoten müssen die Koordinaten und Informationen vorhanden sein, welche Zellen über welche Knoten gebildet werden. Der Speicherbedarf und die erforderlichen Rechenzeiten erhöhen sich, aber die erhöhte Flexibilität wiegt diese Nachteile auf. In Abbildung 7 kann gesehen werden wie ein unstrukturiertes Gitter benutzt wird um einen Gerinneabschnitt um ein Krafthaus nachzubilden.

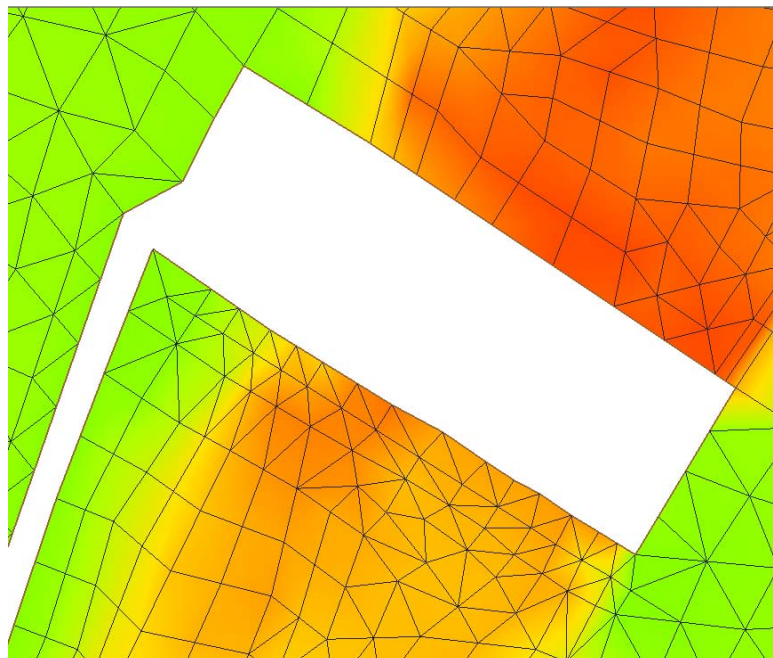


Abbildung 7. Unstrukturiertes Gitter.

3.2.3 Zeit

Eine der unabhängigen Variablen der Flachwassergleichungen ist die Zeit, die dann auch diskretisiert werden muss. Die räumliche Diskretisierung ist durch die ganze Simulation konstant aber dies ist mit der zeitlichen Diskretisierung nicht der Fall. Die Grösse des Zeitschrittes verändert sich laufend mit der Rechnung und wird durch die Courant Zahl

$$CFL = \frac{(\sqrt{u^2 + v^2} + c) \cdot L}{\Delta t \cdot \Omega} \quad (9)$$

beschränkt. Die CFL-Zahl setzt den Zeitschritt Δt in eine Beziehung mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Störung. Die Geschwindigkeit der Störung ist $\sqrt{u^2 + v^2} + c$ und Ω die Fläche des Elementes. Wird $CFL < 1.0$ gesetzt, ist die Strecke die diese Störung innerhalb eines Zeitschrittes Δt zurücklegt kleiner als die Länge L des Elements und die Berechnung bleibt stabil. Diese Bedingung muss für alle Elemente des Gitters erfüllt sein. Ein einziges Element ist daher massgebend für das ganze Gitter. Ein grosses Potential für die Berechnungszeit einer Simulation besteht daher im Gitter selbst.

3.3 Randbedingungen

Am Anfang der Berechnung müssen die Werte der abhängigen Variablen bekannt sein und am Rand des Berechnungsgebietes muss deren Verhalten durch die ganze Berechnungszeit definiert werden. Das erste nennt sich Anfangsbedingungen und das zweite Randbedingungen. Diese beschreiben die Interaktionen und die Einbettung des Modells in die physikalische Umwelt. Die Anfangsbedingungen haben meistens eine begrenzte Auswirkung auf die Berechnung. Das System reagiert ständig gegen Störungen von der Berandung und häufig haben sie sich inner kürzer Zeit durch das ganze Rechengebiet ausgebreitet. Ein Beispiel dafür ist das häufig ein trockenes Gerinne als Anfangsbedingung genommen wird. Die Randbedingungen beschreiben dann wo und wie viel Wasser in das Rechengebiet fliesst und wo und wie das numerische Fluidum es verlässt. Falsche Anfangsbedingungen können sich deshalb korrigieren, während nicht geeignete Randbedingungen die ganze Berechnung beeinflussen. In der Regel sind die Randbedingungen eine Schwäche für die Simulierung und die Lösung hat ihre richtigsten Werte nicht in ihre Nähe, sondern eher in der Mitte.

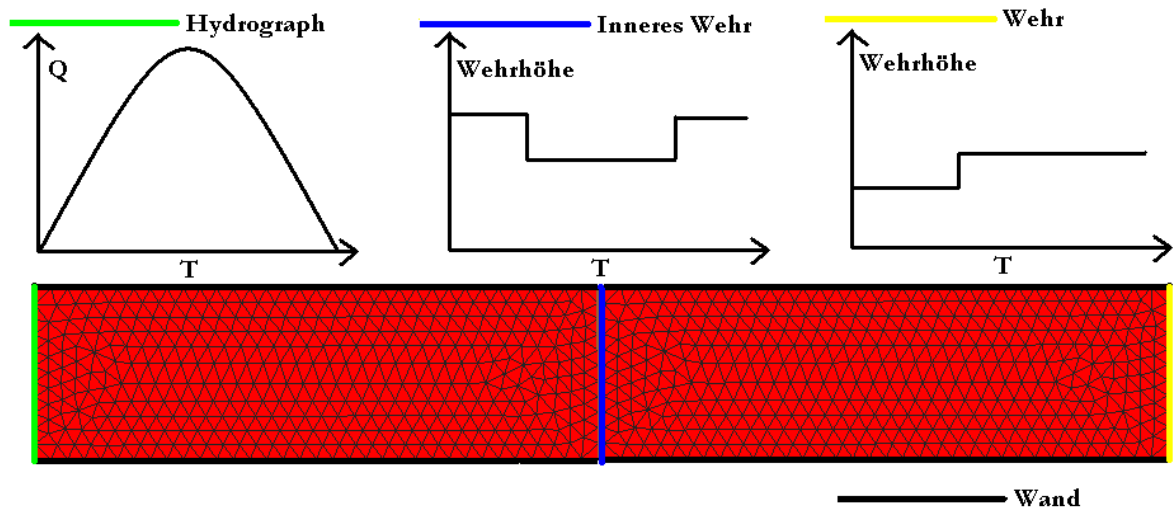


Abbildung 8. Randbedingungen für ein Modell einer Versuchsrinne.

In Abbildung 8 ist ein numerisches Modell mit Anfangs- und Randbedingungen zu sehen. Die rote Farbe auf dem Berechnungsgitter bedeutet dass die Wassertiefe null ist. Am Zuflussrand ist eine Abflussganglinie und am Ausflussrand ein Wehr. In der Mitte befindet sich ein inneres Wehr. Zusammen funktionieren diese Bausteine als Versuchsrinne wo ein Wehr untersucht werden kann.

3.3.1 Innere Randbedingungen

Innere Randbedingungen werden Ersatzmodelle genannt die zum Einsatz kommen wenn die Annahmen der Grundgleichungen verletzt sind. In dem Fall der Flachwassergleichungen sind diese eine hydrostatische Druckverteilung und die Vernachlässigung vertikaler Strömungen und Beschleunigungen. Diese Ersatzmodelle versuchen die Strömungszustände zu simulieren und berechnen die Erhaltungsgrößen an diesem Rand. Im Beispiel des inneren Wehres in Abbildung 8 wird berechnet wie viel Masse und Impuls über das Wehr fließt und wie viel ins Unterwasser abgegeben wird.

4 Lösungsansätze

4.1 Der Lösungsprozess

Der erste Teil des Lösungsprozesses ist das Konzeptstudium. In dieser Phase werden die Lösungsansätze angeschaut und mit den Randbedingungen des Projektes in Kapitel 3.3.1 verglichen. Das Bestkonzept wird in einem folgenden Variantenstudium optimiert und bildet nach einer Validierung den Lösungsvorschlag der Masterarbeit.

4.2 Konzeptstudium

Das Ziel des Konzeptstudiums ist ein geeignetes Verfahren zu finden, das zu einer reifen Lösung weiterentwickelt werden kann. Grundsätzlich gibt es zwei mögliche Konzepte:

- numerisches Lösen auf einem Gitter und
- analytische Betrachtung mittels einer strömungsdynamischen Analyse eines Kontrollvolumens.

Numerische Lösungsansätze

Eine numerische Lösung braucht ein Gitter als Arbeitsgebiet. Auch wenn das Gitter für jeden Fall automatisch aus Eingabegrößen generiert werden könnte sind diese Verfahren Ressourcenintensiv und liefern mehr Daten als nötig sind.

Analytische Lösungsansätze

Das bestehende Problem wird analytisch gelöst in dem man die letzte Zelle vor oder nach der Inneren Randbedingung als Kontrollvolumen betrachtet. Die linke Grenze des Kontrollvolumens ergibt sich aus dem Gitter. Die rechte Grenze wird vorteilhaft dort gewählt, wo die meisten relevanten Größen bekannt oder zu mindest berechenbar sind.

4.2.1 Kriterien der Konzeptbewertung

BASEMENT ist eine Anwender-Software und wird von zahlreichen Ingenieurbüros und Anstalten angewendet. Dies muss berücksichtigt werden und stellt viele Anforderungen an die Lösung der Masterarbeit. Die folgenden Kriterien werden als Randbedingungen benutzt um geeignete Lösungsansätze auszuwählen.

- *Robustheit*: Das Programm wird nicht nur von dem Autor benutzt, sondern von verschiedenen Anwendern mit unterschiedlichen fachlichen Hintergründen. Das Programm muss daher ein möglichst breites Anwendungsspektrum haben und Spezialfälle und unerwartete Zustände sauber behandeln können

- *Benutzerfreundlichkeit*: Nicht Informatiker, sondern in erster Linie Flussbau-Ingenieure müssen ihre Modelle möglichst repräsentativ und einfach aufbauen können.

- *Rechenbedarf*: *BASEMENT* wird gerne für Simulationen langer Flussabschnitte benutzt. Bei solchen Simulationen kann das Rechengitter mehrere tausend Zellen umfassen. Bei Simulationen mit einem Flachwassergleichungsmodell liegt das Interesse nicht bei mikroskopischen Strömungsbildern in 3D, sondern eher auf dem makroskopischen Verhalten eines Flussabschnittes und der Interaktionen zwischen den einzelnen Teilen. Ein

Kompromiss muss daher getroffen werden, wie viele Ressourcen benutzt werden sollten um ein einziges Wehr in dem ganzen Flusslauf zu simulieren.

- *Zuverlässigkeit*: Der Lösungsansatz muss brauchbare Resultate abgeben die der physikalischen Welt in nutzbarer Genauigkeit entsprechen.
- *Konsistenz*: Die Daten die der Routine zur Verfügung stehen stammen aus einem tiefengemittelten Flachwassergleichungsmodell. Das gleiche Modell ist auch der Empfänger für die Ergebnisse der Routine und muss die Auswirkungen der inneren Randbedingung in das Rechengebiet einspeisen. Die Eigenschaften und Beschränkungen des FWG-Modells sollten daher massgebend sein für die Genauigkeit und die Art von Daten die eingespeist werden.

4.2.2 Bewertungsmatrix und Wahl des Bestkonzepts

Um das Bestkonzept zu wählen wurden die Vor- und Nachteile der beiden Konzepte gegenüber den Randbedingungen des Projektes verglichen. Bei jedem Kriterium waren maximal zehn Punkte zu vergeben die zwischen beiden Konzepten aufgeteilt wurden. Durch Gewichtung der einzelnen Kriterien wurde versucht ihre Bedeutung darzustellen (**Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**).

Tabelle 1. Bewertungsmatrix

	Robustheit	Benutzer-freundlichkeit	Rechenbedarf	Zuverlässigkeit	Konsistenz	Gewogene Note
Gewichtung	15%	25%	25%	25%	10%	100%
Analytisch	8	6	10	2	8	6.5
Numerisch	2	4	0	8	2	3.5

4.2.2.1 Begründung der Benotung

- *Robustheit*: Die numerische Lösung braucht ein Gitter das entweder manuell oder automatisch generiert werden muss. Die analytische Lösung ist einfacher und daher gibt es weniger potentielle Fehlerquellen.
- *Benutzerfreundlichkeit*: Die analytische Lösung mit wenigen Eingabegrößen ist dem Flussbau-Ingenieur eher bekannt, während die numerische Lösung immer gewisse Grundkenntnisse von Numerik erfordert.
- *Rechenbedarf*: Die analytische Lösung basiert auf zählbaren Operationen während eine numerische Lösung iteriert werden muss. Der Unterschied in der Berechnungszeit und der Anforderungen nach Arbeitsspeicher und Hardware im Allgemeinen ist deutlich. Die analytische Lösung ist hier deutlich schneller in Berechnung.
- *Zuverlässigkeit*: Eine numerische Lösung hat die Möglichkeit, eine Strömung mittels Iteration auf eine fast beliebig grosse Genauigkeit zu lösen.
- *Konsistenz*: Die Ergebnisse einer analytischen Betrachtung sind in einem besseren Einklang mit der Qualität der Daten im übrigen Modell.

Tabelle 1 zeigt die Benotung und ihre Resultate. Mit einer Gesamtnote von 6.5 wurde die analytische Lösung als Bestkonzept gewählt. Sie ist einfach, effizient und kann ohne spezifische Kenntnisse bedient werden. Vor allem braucht sie weniger Zeit in der Berechnung und kann einfach aufgestellt werden. Aus diesem Grund wurde die analytische Methode im Variantenstudium weiterentwickelt.

4.3 Variantenstudium

4.3.1 Ablauf

Der Zweck des Variantenstudiums ist das Bestkonzept, die analytische Methode, weiter zu entwickeln. Zu erst wird das Kontrollvolumen aufgestellt und anhand dessen der Massen- und Momentumflux eingeführt und verschiedene Varianten zur Ermittlung der Eingabegrößen behandelt.

4.3.2 Das Kontrollvolumen

Das Kontrollvolumenverfahren ist eine Methode die eine Analyse besonders anschaulich macht. Das Kontrollvolumen besteht aus dem Element bei der inneren Randbedingung. Für die analytische Betrachtung muss ein fiktives Wehr integriert werden.

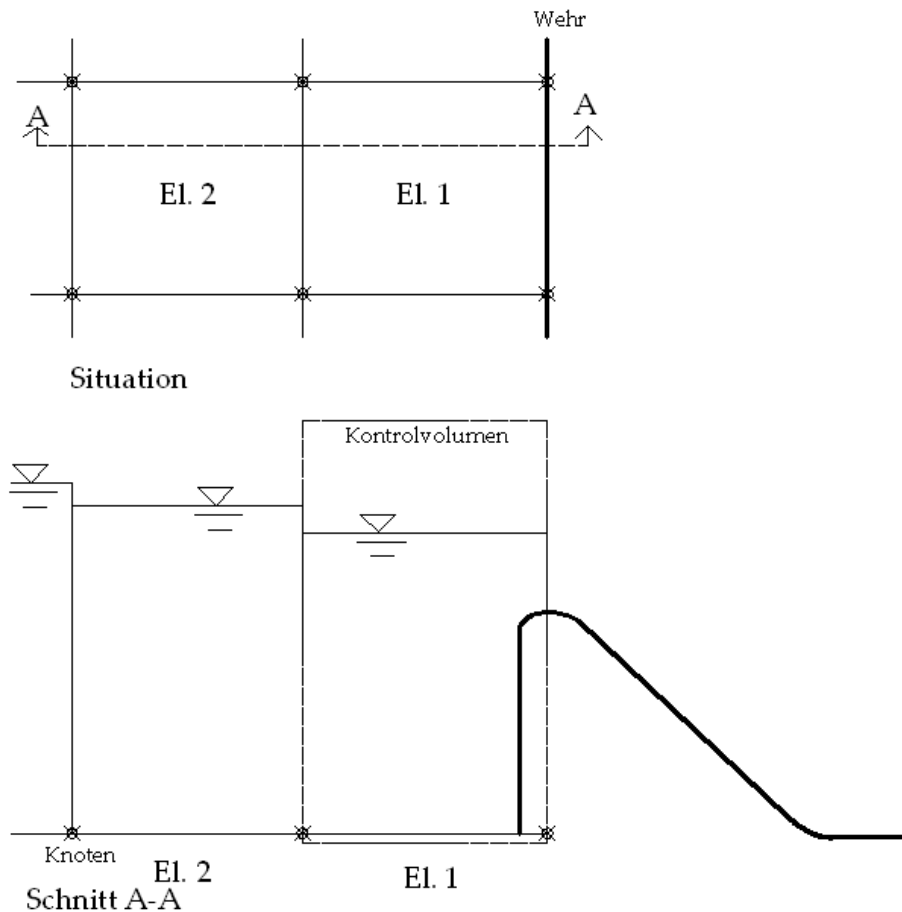


Abbildung 9. Gewähltes Kontrollvolumen vor der Inneren Randbedingung.

Die Position des Wehrscheitels wird vorteilhaft am Rand des Kontrollvolumens gewählt. Bei dem Wehrscheitel sind die meisten Informationen bekannt was die Ermittlung der Erhaltungsgrößen erleichtert.

4.3.3 Massenflux

4.3.3.1 Kritik der bestehenden Behandlung.

Bei der bisherigen Behandlung wird eine Poleni-Weissbach-Formel (Gleichung 1) für die Ermittlung der Masse benutzt. Diese Formel braucht nur einen Abflussbeiwert μ um den Abfluss als Funktion der Wassertiefe h zu bestimmen. Die Formel selbst stammt aus einer analytischen Betrachtung bei der die Torricelli'sche Geschwindigkeit über die Abflusstiefe integriert wird. Durch Skalierung mit einem empirischen Beiwert μ entsteht die Poleni-Weissbach-Gleichung. Der Abflussbeiwert bietet gute Kalibrierungsmöglichkeiten für eine numerische Simulation entspricht aber nicht dem Stand des wissenschaftlichen Fortschritts. Ferner ist auch zu beachten dass wenn die Wassertiefe h gerade beim Wehr abgelesen wird, und nicht die gesamte Energiehöhe H , wird die Energie im System unterschätzt, weil sich die Wasseroberfläche im Wehrbereich nach unten krümmt. Mit dem Beiwert μ kann dieses zum Teil korrigiert werden, aber dann muss die Annahme gelten, dass diese Krümmung eine lineare Funktion des Wasserspiegels ist.

4.3.3.2 Vorgeschlagene Lösung für vollkommenen Abfluss.

In der Literatur finden sich mehrere Ansätze zur Abflussberechnung, die empirisch entwickelt wurden. Die meisten gehen davon aus, dass h oder H in einer Entfernung von 3-5-facher Überfallhöhe y vor dem Wehr abgelesen wird. Die meisten Gleichungen haben die gleiche Form, aber unterscheiden sich in der Ermittlung des Abflussbeiwerts. In (Vischer et alii 1998) wird der Abfluss zu

$$q = C_d (2 \cdot g \cdot H^3)^{1/2} \quad (10)$$

bestimmt. Der Abflussbeiwert C_d berechnet sich zu

$$C_d = \frac{2}{3\sqrt{3}} \left[1 + \frac{4 \cdot \chi}{9 + 5 \cdot \chi} \right] \quad (11)$$

worin die dimensionslose Abflusshöhe

$$\chi = \frac{H}{H_D} \quad (12)$$

ist.

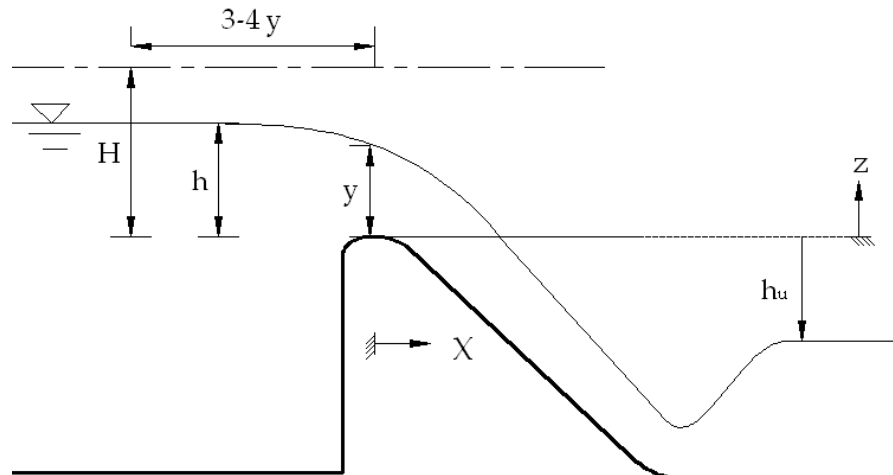


Abbildung 10. Definition der Variablen der Abflussgleichungen

Für die neue Innere Randbedingung „Inneres OGEE-Wehr“ wird diese Formel als Grundlage für den Massenflux über das Wehr benutzt. In Abbildung 10 sind die Variablen für Gleichungen 10-12 definiert.

4.3.3.3 Vorgeschlagene Lösung für unvollkommenen Abfluss

Der Begriff Modular Limit sagt aus, ab wann die Abflusskapazität des Wehres durch die Wassertiefe im Unterwasser beeinflusst wird. Die Version 1.5 von *BASEMENT* nimmt an, dass das Abflussvermögen aller Wehre sofort beeinflusst wird, wenn der Unterwasserspiegel den Wehrscheitel erreicht. Dies ist aber für verschiedene Wehrarten unterschiedlich. Für ein OGEE-Wehr ist der Modular Limit erreicht ,wenn die Unterwassertiefe die halbe Oberwassertiefe erreicht hat (Bollrich 2007). In (Tullis 2008) werden vier Abflussgleichungen mit physikalischen Untersuchungen verglichen. In diesem Paper ist diese Gleichung von Skogerboe et alii zu finden. Weiterhin wird auf die Abflussberechnung zu

$$q_s^* = 2.38 \frac{(h - h_u)^{1.69}}{(-(\log(h_u/h) + 0.0025))^{1.20}} \quad (13)$$

nach Skogerboe et alii (1967) verwiesen. Darin ist h_u die Wasserhöhe im Unterwasser gemäss Abbildung 10. **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** und bei vollkommenem Abfluss negativ. Die Gleichung wurde für amerikanische Einheiten erstellt, wurde aber hier in das SI-System übersetzt.

Ein Modellwechsel ist eine Schwachstelle bei numerischen Simulationen und es muss sichergestellt werden, dass der Übergang von einem Modell zum anderen kontinuierlich erfolgt. Gleichung 14 stellt dies sicher und der Verlauf der Verminderung des Abflussvermögens ist in der Abbildung 11 zu sehen.

$$q_s = q_s^* - (q_s^*(s = 0.5) - q) \quad (14)$$

Mit dieser Gleichung wird der unvollkommene Abfluss bei dem OGEE-Wehr richtig behandelt.

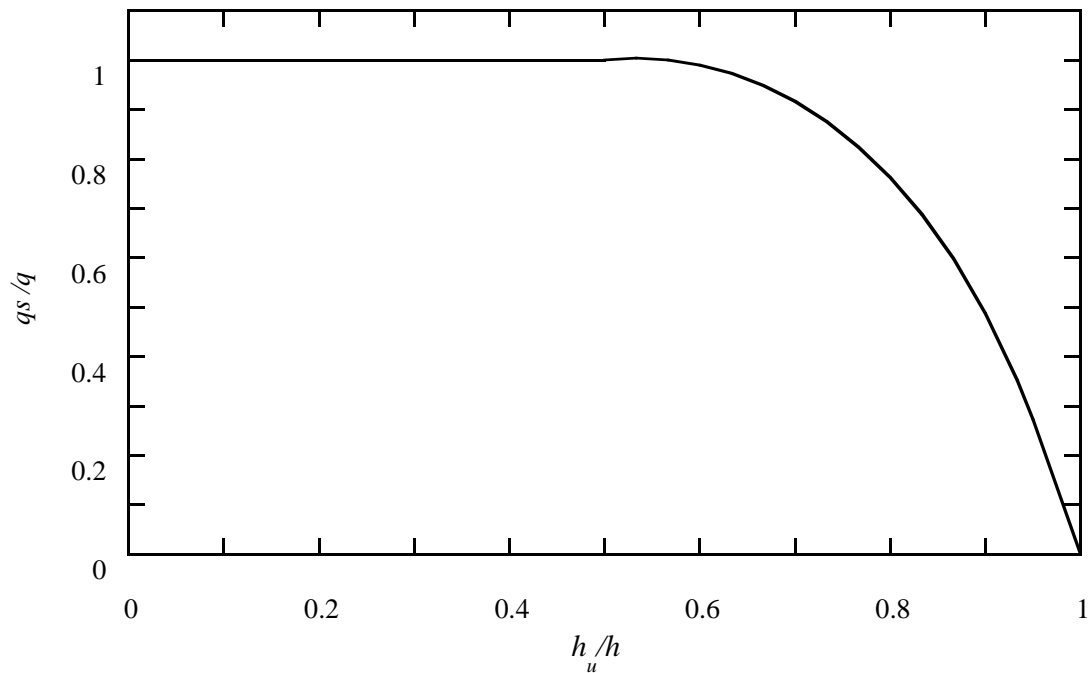


Abbildung 11. Durchflussreduktion für ein OGEE-Wehr

4.3.4 Ermittlung von Eingabegrößen

Selbst die besten Formeln und Ansätze können nicht gute Ergebnisse abgeben wenn die Eingabegrößen falsch bestimmt wurden. Hier werden drei Varianten erläutert um Eingabegröße für Innere Randbedingungen zu bestimmen. Welches von diesen Varianten das geeignete ist, hängt von der inneren Randbedingung ab. Das Weitere Vorgehen erfolgt am Beispiel eines Wehres.

4.3.4.1 Eingabegrösse am Rand der inneren Randbedingung

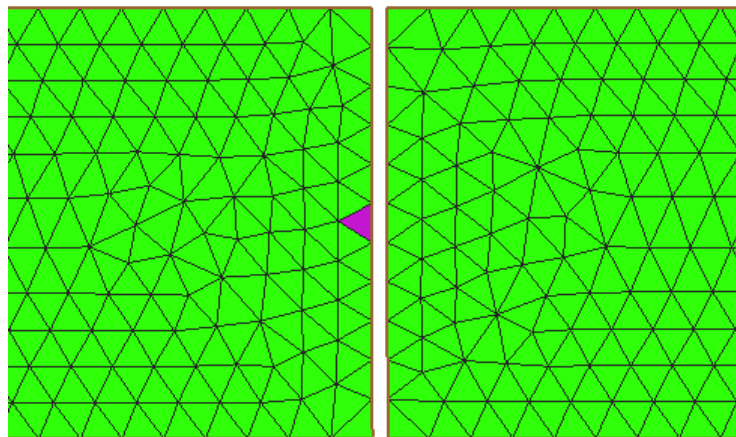


Abbildung 12. Eingabegrößen kommen von dem veilchenblauen Element

Die Innere Randbedingung holt sich den Wert aus der gleichen Zelle als sie gerade berechnet. In dem Fall von einem Wehr ist dieses Verfahren nicht geeignet, weil die Wehrformeln sich auf das H in einer Entfernung von 3- 5 mal der Überfallhöhe oberhalb des Wehres beziehen. Die Krümmung der Wasserfläche und der Energieverlust in der Anströmung zu dem Wehr wurde dabei nicht richtig behandelt.

4.3.4.2 Massgebendes Element gewählt

Bei dieser Variante ist ein Element gewählt welches dann massgebend für die ganze Simulation und die ganze Innere Randbedingung wird.

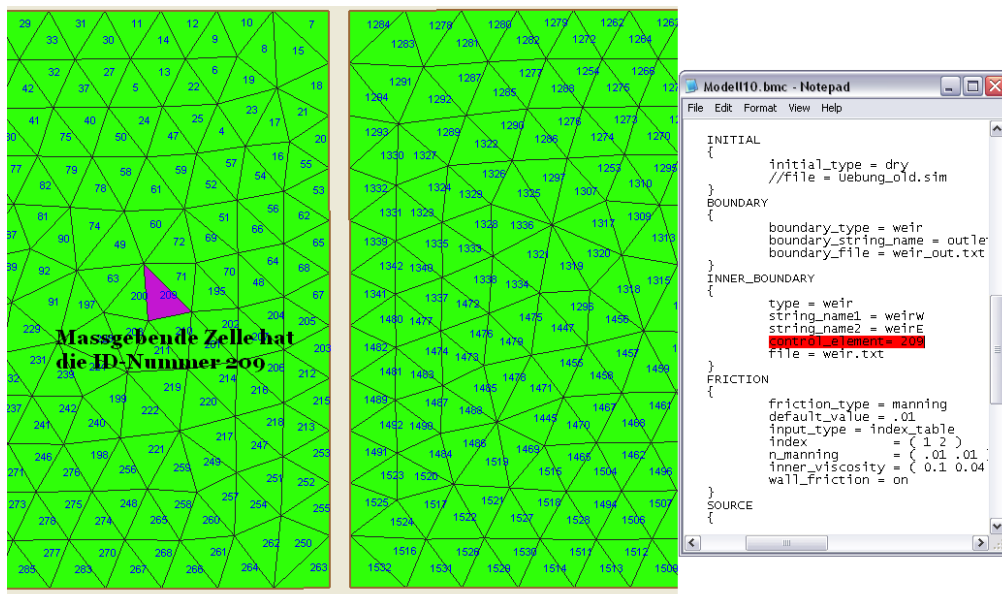


Abbildung 13. Massgebendes Element wird in der Eingabedatei definiert

Aus dem Wasserstand und der Geschwindigkeiten in dieser Zelle wird dann H in jedem Zeitschritt berechnet und benutzt um den Abfluss über das ganze wehr zu ermitteln. In der Mehrheit der Fälle sollte diese Lösung befriedigend sein. Es kann aber vorkommen, dass die ganze Wehrbreite nicht wasserführend sein sollte und trotzdem Wasser, gemäss diesem massgebenden Element, über die ganze Breite weggetragen wird. Auch könnten ungleichförmige Anströmungen und instationäre Strömungszustände zu Probleme führen.

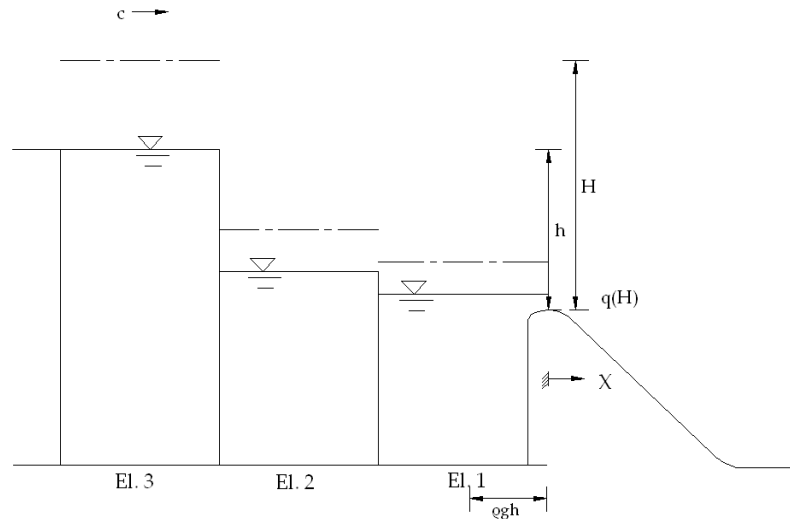


Abbildung 14. Welle kommt an das Wehr

In der Abbildung 14 wird eine Welle mit der Wellengeschwindigkeit c gezeigt. Ist Element 3 das massgebende Element für diese Simulation kann es vorkommen das so viel Wasser aus dem Element 1 gepumpt wird, während die Welle in Element 3 sich befindet, dass der Wasserstand in dem nächsten Zeitschritt negativ wird.

4.3.4.3 Aktive Ermittlung des massgebenden Elements

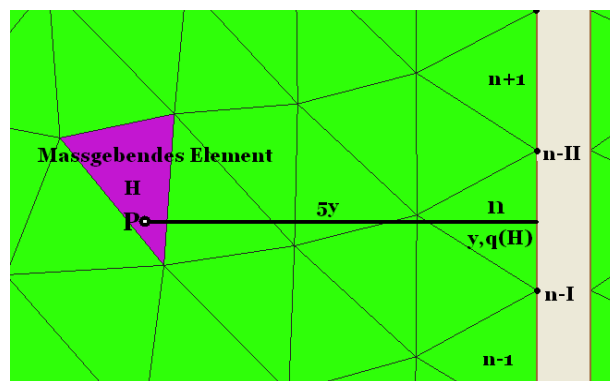


Abbildung 15. Aktive Ermittlung des massgebenden Elements

Die Innere Randbedingung bestimmt automatisch die massgebende Zelle für die Verhältnisse in jedem Zeitschritt. Das erfolgt gemäss dem folgenden Schema:

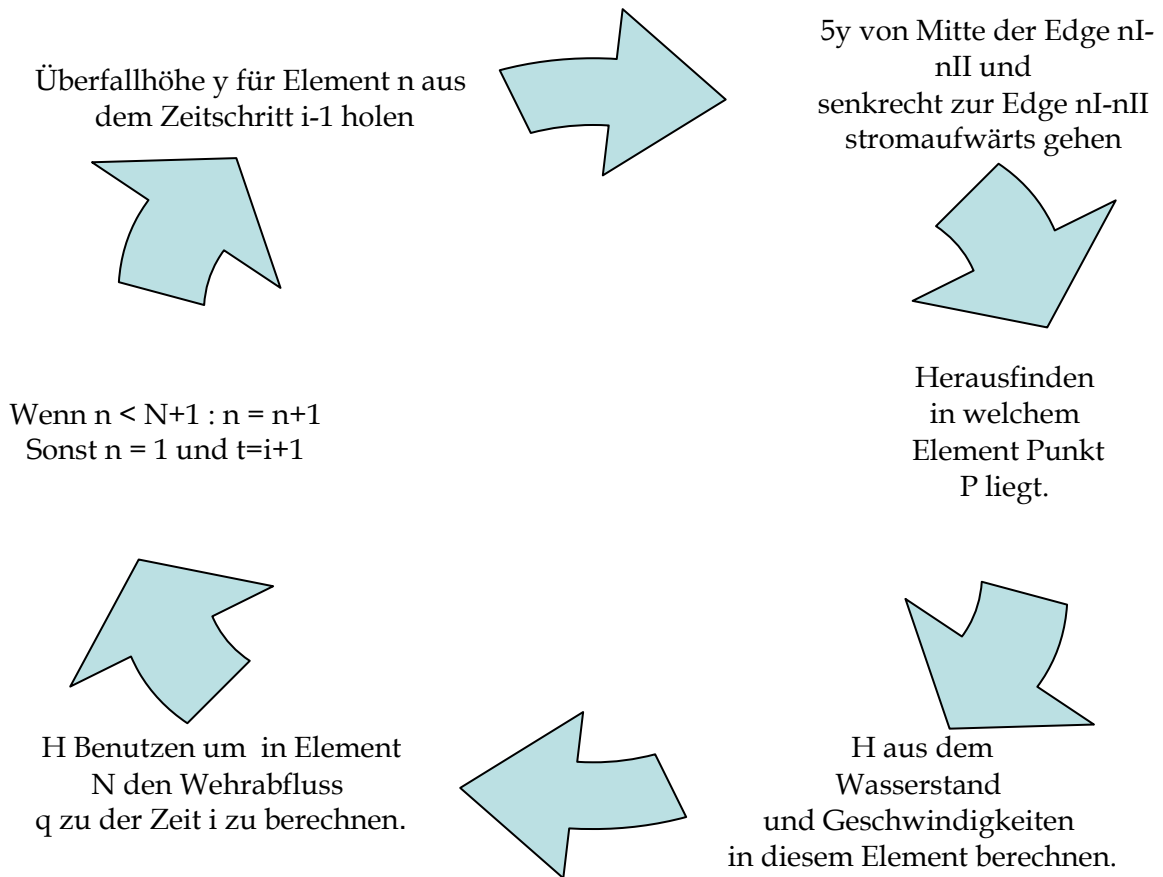


Abbildung 16. Diagramm zur Beschreibung der Ermittlung des massgebenden Elements

Um zu erkennen in welchem Element Punkt P liegt kann die Tatsache ausgenutzt werden dass die Elemente immer konvex sind. Für solche Vielecke liegt einer Punkt immer auf der gleichen Seite der Berandungen (Bourke 1987).

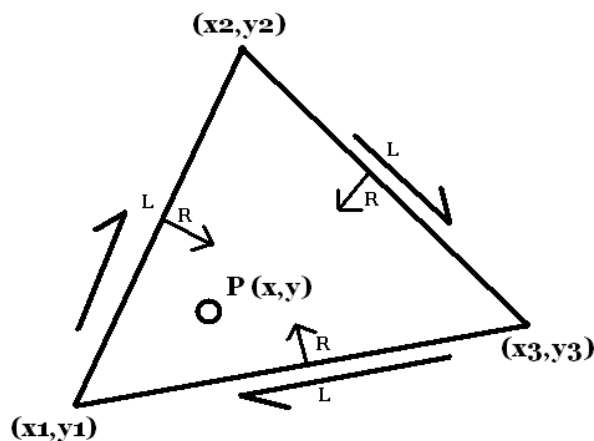


Abbildung 17. Definition für Gleichung 15.

Für eine Situation wie im Bild ist folgt diese Bedingung:

$$\lambda = (y - y_i)(x_{i+1} - x_i) - (x - x_i)(y_{i+1} - y) \quad (15)$$

Hat λ das gleiche Vorzeichen für alle Punkte des Vielecks, dann liegt der Punkt P innerhalb des Elements. Für eine einfachere Programmierung wird empfohlen n+1 Punkte für jedes n-Eckiges Element zu definieren, wo der Punkt n+1 gleich dem Punkt 1 ist.

Die aktive Ermittlung des massgebenden Elements berücksichtigt einen ungleichförmigen Abfluss über das Wehr und vermeidet damit negative Wassertiefen in den Elementen die eine geringere Zuströmung haben, z.B. bei einem schrägen Wehr.

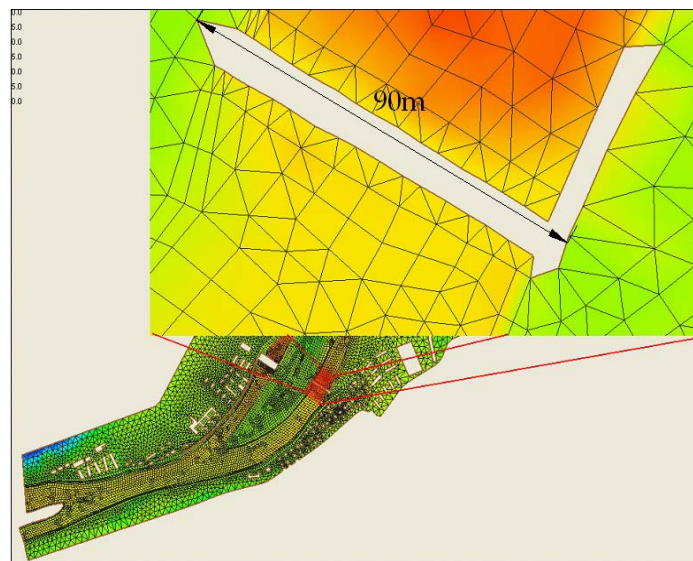


Abbildung 18. Ein Gitter aus einer kommerziellen Simulation.

Bei den grösseren Simulationen sind die Elemente aber so gross dass man mit dieser $5 \cdot y$ Bedingung bei üblichen Wehrabflusstiefen immer noch innerhalb des ersten Elements vor dem Wehr ist. In dem Gitter in Abbildung 18 haben die letzten Elemente vor dem Wehr eine Grössenordnung in dem Meterbereich.

4.3.4.4 Wahl der Varianten

Für die Ermittlung der Eingabegrössen haben alle Varianten ihre Stärken und Schwachen. Es hängt von der Inneren Randbedingung ab, welche gewählt werden sollte. Für ein Wehr können die Eingabegrössen nicht unmittelbar vor dem Wehr geholt werden, sondern in einer gewissen Entfernung. Ob man das massgebende Element einfach manuell wählt oder aktiv ermitteln lässt hängt von dem Gitter an und sollte für jede Anwendung angeschaut werden.

4.3.5 Momentumflux

4.3.5.1 Kritik der bestehenden Lösung.

Der Momentumflux ist eine Funktion von der Geschwindigkeit Quadrat und ist daher sehr empfindlich gegen Geschwindigkeitsänderungen. Es kann gezeigt werden dass Eine Skalierung nur für einen einzigen Fall stimmt (Anhang). Tiefengemittelte Daten enthalten keine Informationen bezüglich der Änderung der Geschwindigkeit über die Tiefe und daher müssen diese Daten mit Verteilungen aus der Literatur ergänzt werden.

4.3.5.2 Momentumflux aus einer Geschwindigkeitsverteilung

In der Literatur gibt es Geschwindigkeitsverteilungen für die Strömung oberhalb eines Wehrrückens.

Vischer und Hager (Vischer et alii 1998) schlagen die folgende Verteilung vor:

$$\frac{v}{(2 \cdot g)^{1/2}} = \frac{1}{2} \left[\frac{r + 0.75}{r + z/H} \right] \quad (16)$$

Wo $r = d^2/x^2 = 0.584$ die dimensionslose Krümmung des Wehrscheitels ist. Die übrigen Grössen der Gleichung 16 sind auf Abbildung 19 definiert. Betrachten wir eine Lamelle der Breite dh wie auf Abbildung 19.

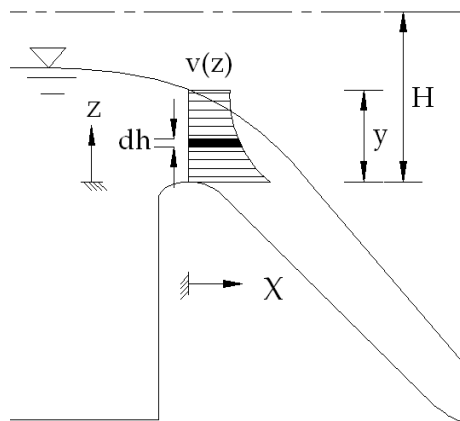


Abbildung 19. Definition für Gleichung 16.

Die Geschwindigkeit in dieser Lamelle ist gemäss Gleichung 16:

$$v(z) = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot g)^{1/2} \cdot \left[\frac{r + 0.75}{r + z/H} \right] \quad (17)$$

Der spezifische Momentumfluss durch diese Lamelle ist dann:

$$d\dot{m} = K_m^2 \cdot u^2(z) \cdot dh \quad (18)$$

$$d\dot{m} = K_m^2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot g)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{r + 0.75}{r + z/H} \right] \right]^2 \cdot dh \quad (19)$$

Den ganzen spezifischen Momentumfluss aus der Kontrollvolumen erhalten wir wenn wir $d\dot{m}$ zwischen $[0; y]$ integrieren:

$$\dot{m} = \int_0^y K_m^2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot g)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{r + 0.75}{r + z/H} \right] \right]^2 \cdot dh \quad (20)$$

$$\dot{m} = \frac{g \cdot K^2 \cdot H^2 \cdot (r + 0.75)^2}{2} \cdot \left[\frac{1}{r} - \left[r + \frac{0.75 \cdot H_D \cdot (H/H_D)^{1.1}}{H_D} \right]^{-1} \right] \quad (21)$$

Wo die obere Grenze der Integration, y die Strahlstärke oberhalb des Wehrscheitels ist

$$y = 0.75 \cdot H_D \cdot \left[\frac{H}{H_D} \right]^{1.1} \quad (22)$$

Wird die Geschwindigkeitsverteilung in Gleichung 16 zwischen 0 und y integriert ist das Resultat nicht gleich dem spezifischen Abfluss Gemäss Gleichung 10. Deshalb würde der Korrekturfaktor K_m eingeführt. Er wird wie folgt berechnet:

$$K_m = \frac{\int_0^y \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot g)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{r + 0.75}{r + z/H} \right] \cdot dz}{C_d \sqrt{2 \cdot g \cdot H^3}} \quad (23)$$

$$K_m = \frac{\frac{4}{2} \sqrt{2 \cdot g \cdot H^3} (r + 0.75) \left(\ln \left[r + \frac{0.75 \cdot H_D \left(\frac{H}{H_D} \right)^{1.1}}{H} \right] - \ln(r) \right)}{C_d \sqrt{2 \cdot g \cdot H^3}} \quad (24)$$

$$K_m = \frac{(r + 0.75) \left(\ln \left[r + \frac{0.75 \cdot H_D \left(\frac{H}{H_D} \right)^{1.1}}{H} \right] - \ln(r) \right)}{2 \cdot C_d} \quad (25)$$

Mit dieser Lösung wird gewährleistet dass der Impuls von der gleichen Menge Wasser stammt als was tatsächlich fließt.

4.3.6 Druckfluss

In der bisherigen Behandlung wurde der Druck entlang der Wehrberandung als hydrostatisch angenommen.

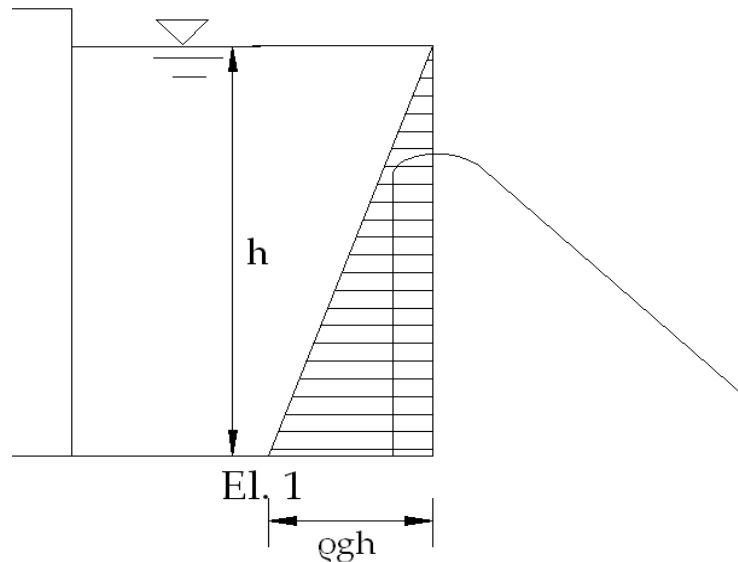


Abbildung 20. Darstellung des hydrostatischen Drucks.

In dem Beispiel von dem OGEE-Wehr ist dies nicht der Fall. Beim Bemessungsabfluss herrscht ein Atmosphärischer Druck auf dem Wehrrücken. In Abbildung 21 wird der Druckverlauf für drei Lastfälle dargestellt. Bei einem grösseren Abfluss als dem Bemessungsabfluss ist der Druck am Wehrscheitel negativ und bei einem geringeren Positiv.

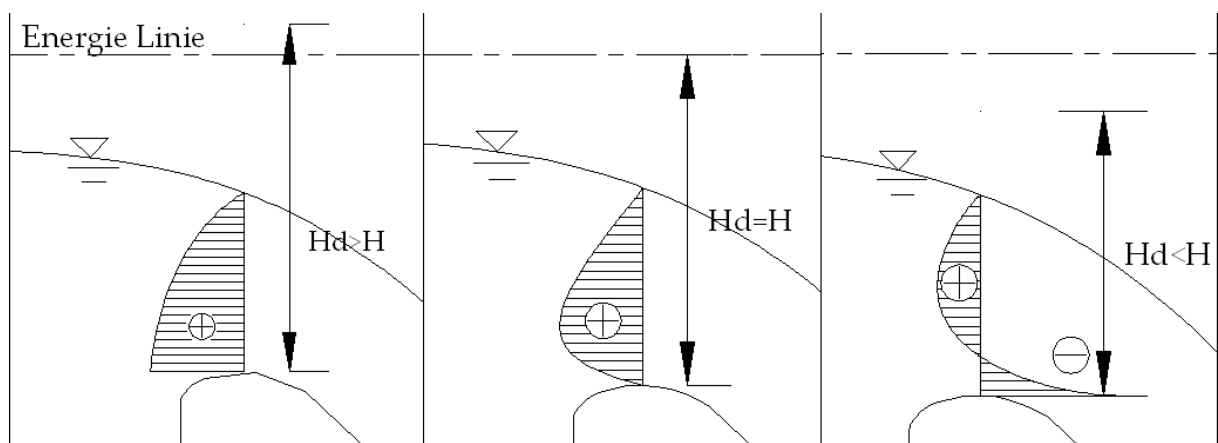


Abbildung 21. Druckverlauf oberhalb des Wehrscheitels.

In der Literatur gibt es nicht viele Informationen über Druckverteilungen über den Fließquerschnitt. Der Schwerpunkt der Forschung bezieht sich auf Kavitation und bei

Druckverteilungen entlang des Wehrrückens. In Knapp (1960) wird die Druckverteilung über dem Wehrscheitel für drei Fälle berechnet. Das Buch „Ausfluss, Überfall und Durchfluss im Wasserbau“ stammt aus der Zeit als weder Computer noch Taschenrechner üblich waren und deshalb sind die Methoden, die auf Tabellen basieren, nicht gut für eine Programmierung geeignet. Die folgende Formel wurde mit Inspiration aus dem Buch hergeleitet.

$$p(z) = K_p (H_D - z - (H - y) \left[\frac{r_i + y}{r_i + z} \right]^2) \quad (26)$$

Wo $r_i = 0.75 \cdot H_D$ die Krümmungshalbmesser der Wehrkrone sind. Andere Grössen sind auf Bild 19 definiert. Der Faktor 0.75 würde so gewählt dass der Druck am Wehrrücken beim Bemessungsabfluss gleich Null ist. Der Beiwert K_p skaliert diese Druckverteilung so, dass der gleiche Druck am Wehrrücken herrscht als im Buch „Dam Hydraulics“ (Vischer et alii 98). Auf dem infinitesimalen Streifen der Höhe dh wirkt die spezifische Druckkraft:

$$dp = K_p (H_D - z - (H - y) \left[\frac{r_i + y}{r_i + z} \right]^2) \cdot dh \quad (27)$$

Und über den ganzen Strahl:

$$p = \int_0^y K_p (H_D - z - (H - y) \left[\frac{r_i + y}{r_i + z} \right]^2) \cdot dh \quad (28)$$

4.3.6.1 Druckkraft auf das Wehr.

Ist die Druckkraft im Strahl abgeklärt ist das nächste Problem die Ermittlung von der Druckkraft die auf das Wehr selbst bewirkt. Dafür gibt es folgende Ansätze.

Variante 1

Eine einfache Hydrostatische Druckverteilung von der Wasseroberfläche. Abbildung 22 zeigt dass der Druck einen Anfangswert $\rho \cdot g \cdot y$ beim Wehrscheitel bekommt und ab dort wächst er hydrostatisch bis zu der Sohle.

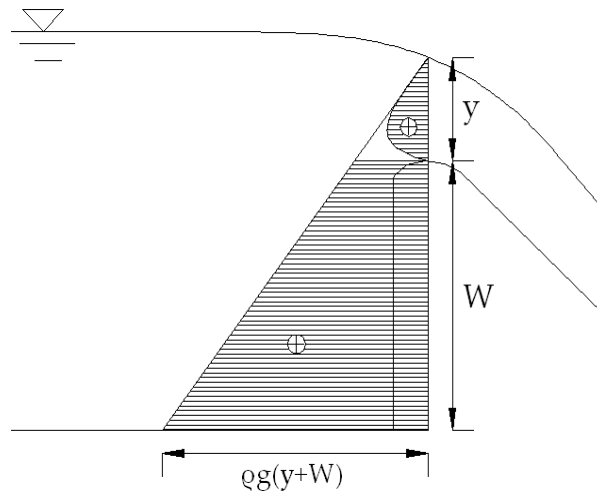


Abbildung 22. Ansatz für die Ermittlung des Drucks auf das Wehr.

Variante 2

Eine die von $p(0)$ gemäss Gleichung 26 hydrostatisch zu der Sohle wächst. Genauer in der Abbildung 23 gezeigt.

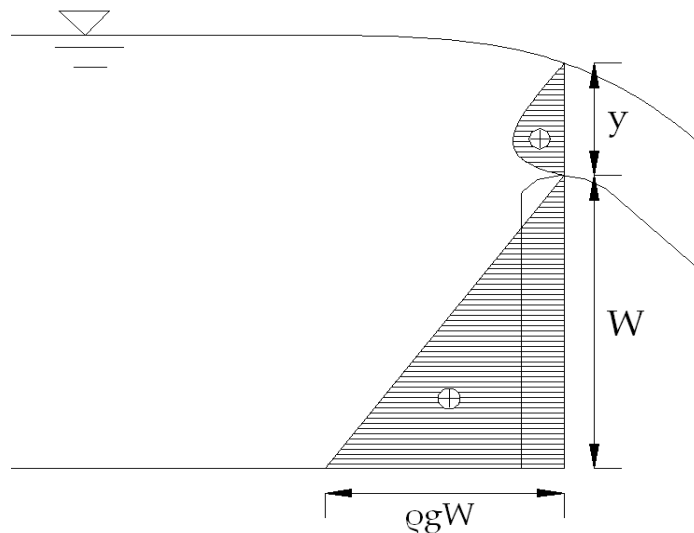


Abbildung 23. Ein Ansatz für die Ermittlung des Drucks auf das Wehr.

Variante 3

Ermittlung der Druckkraft auf das Wehr aus dem Stützkraftsatz.

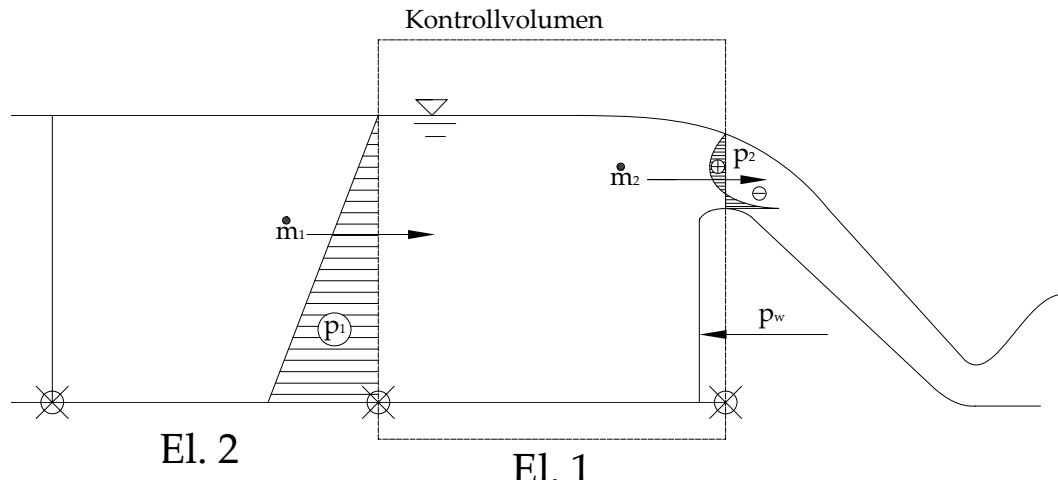


Abbildung 24. Stützkraftsatz auf das Kontrollvolumen.

Mit dem Stützkraftsatz lässt sich die folgende Gleichung aufstellen.

$$P_1 \cdot A_1 - P_2 \cdot A_2 - F_{visc} - F_W = \rho \cdot Q \cdot v_2 - \rho \cdot Q \cdot v_1 \quad (29)$$

Und wird nach F_W gelöst:

$$F_W = \frac{\gamma \cdot h^2}{2} + \rho \cdot Q \cdot v_1 - P_2 \cdot y_0 - \dot{m}_2 \quad (30)$$

Hier werden die Viskoskräfte, F_{visc} , und Reibung vernachlässigt. Diese Kräfte sind einige Größenordnungen kleiner als der Druck und Momentumflux (Crowe 2001).

5 Validierung

Die Validierung des Modells der inneren Randbedingung ist ein Bestandteil der Masterarbeit. Ein Versuchstand wurde nachgebaut und die Ergebnisse des Modells wurden mit Ergebnissen von physikalischen Untersuchungen verglichen. Das Gitter besteht aus 1.532 Dreiecken und zwei Becken. Ganz nach links fliesst das Wasser aus 18 Elementen die als externe Quellen Definiert sind ein. Die Wassermenge wird durch einen Hydrografen geregelt.

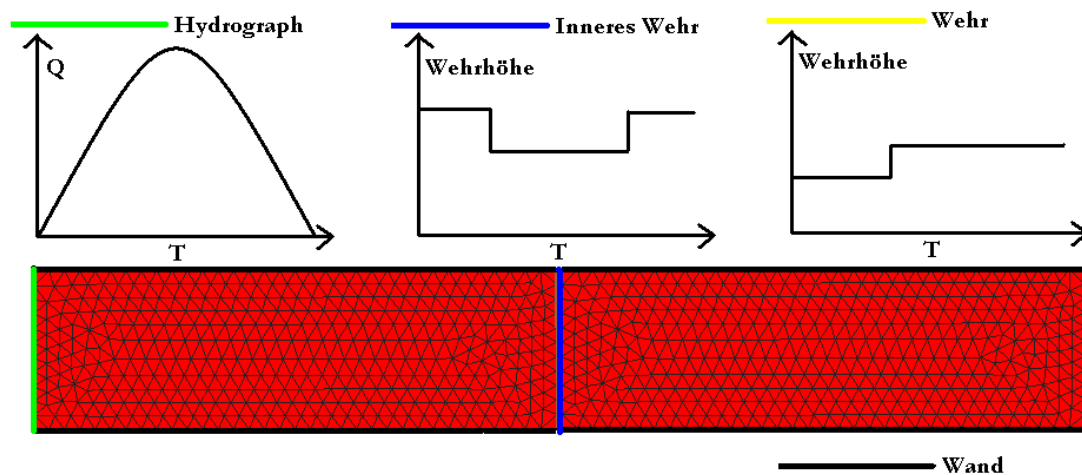


Abbildung 25. Das Modell von dem Versuchsstand.

Zwischen diesen beiden Becken befindet sich ein inneres Wehr mit einer definierten Entwurfsenergiehöhe H_D . Der Bemessungsabfluss wird dann gemäss der Abflussgleichung (Gleichung 10) Ermittelt. Am Abflussrand des rechten Beckens ist ein Wehr definiert um dem Wasserstand im Unterwasser regeln zu können und somit kann ein unvollkommener Abfluss eingestellt werden. Simuliert wurden Zehn verschiedene Verhältnisse zwischen Abfluss und Bemessungsabfluss und für jeden Zustand läuft die Simulation für 60 Sekunden. Weil die Unterschiede zwischen den Stufen nicht gross sind, ist diese Zeit genügend um einen Stationären Zustand zu erreichen. Bei der Ende jeden Zustandes wird dann der Wasserstand h abgelesen und gegen Versuchsreihen aus der Literatur (Johnson und Savage 2006) verglichen

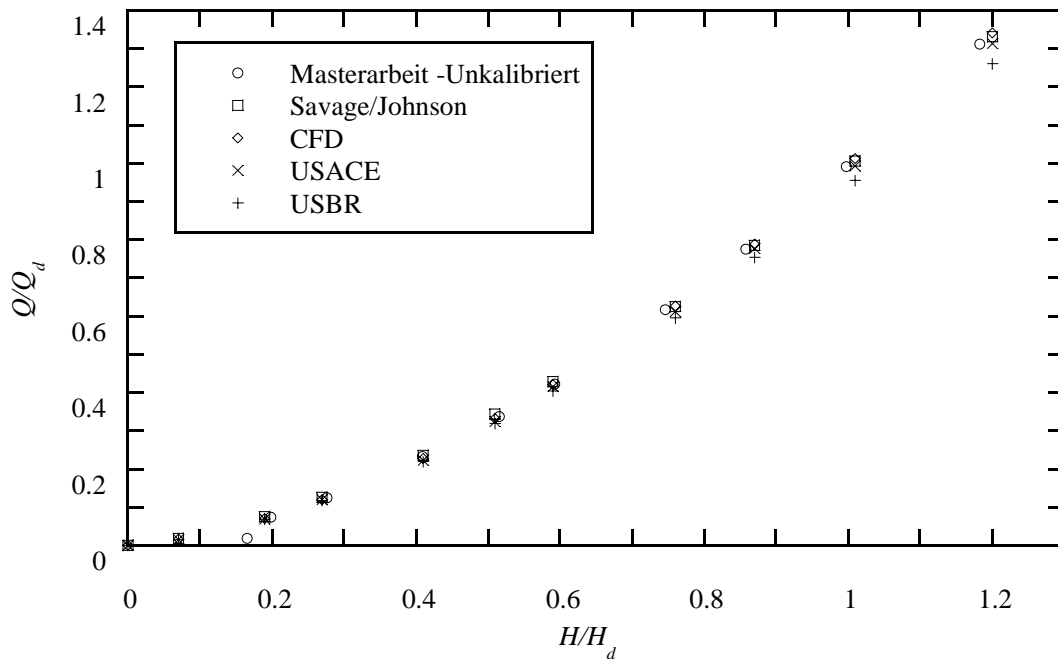


Abbildung 26. Validierung des Modells.

Die Resultate in Abbildung 26 sind mit dem Bemessungsabfluss und der Bemessungsabflusstiefe jeden Wehres normiert. Bei dem kleinsten Zustand ist die Abflusshöhe über das Wehr kleiner als die minimal definierte Wassertiefe in *BASEMENT*. Solche Limitierung ist nötig um die Stabilität zu gewährleisten und um zu vermeiden das mit zu kleinen Nummern gearbeitet wird. Für die anderen Resultate zeigt das Modell gute Übereinstimmung. Es lässt sich aber nicht gut schätzen wie das Modell bei H/H_d grösser als 1.2 funktioniert. Es kann aber gesagt werden dass bei der Bemessung eines OGEE-Wehres wird der Bemessungsabfluss eher grösser als kleiner gewählt um die negative Wasserdrücke zu vermeiden.

5.1 Kalibrierung des Abflussbeiwertes

Als Validierungsdaten stehen Ergebnisse aus vier Versuchen zur Verfügung. Der Mittelwert des Normierten Abflusses allen Versuchen kann als Sollwert benutzt werden für eine Kalibrierung des numerischen Modells.

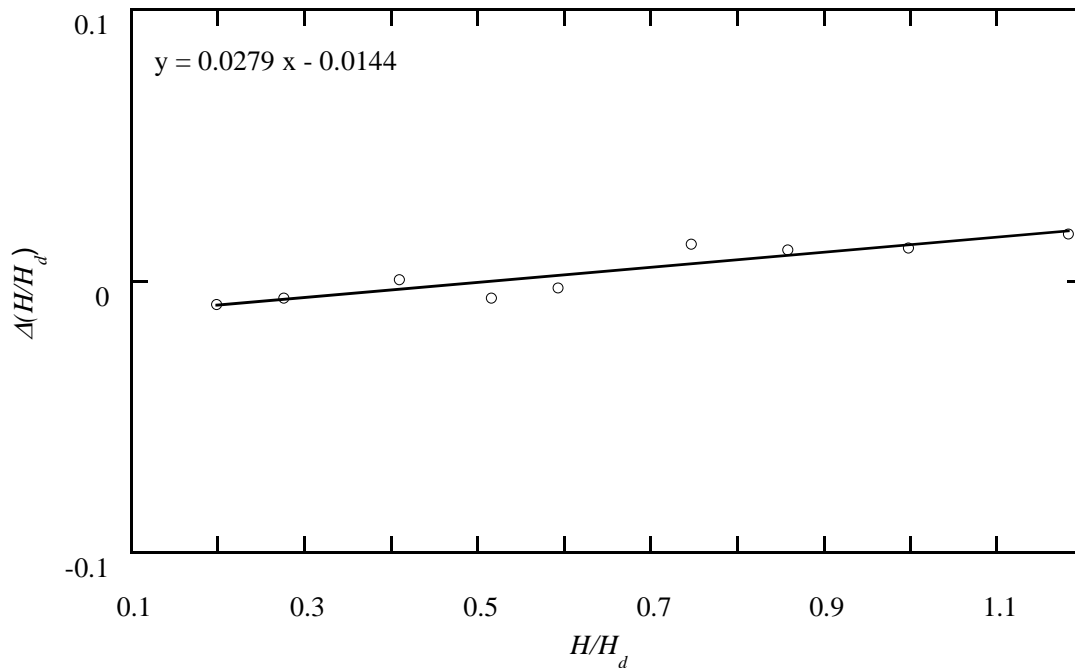


Abbildung 27. Kalibrierung des Abflussbeiwertes.

Auf dem Bild wird das Ergebnis der Simulation von dem Sollwert der Untersuchungen abgezogen und als eine Funktion der Energiehöhe dargestellt. Wird eine Linie dadurch gezogen bildet ihre Gleichung eine Grundlage für die Kalibrierung des Abflussbeiwertes.

$$C'_d = \frac{2}{3\sqrt{3}} \left[1 + \frac{4 \cdot \chi}{9 + 5 \cdot \chi} \right] - 0.0279 \cdot \chi + 0.0144 \quad (31)$$

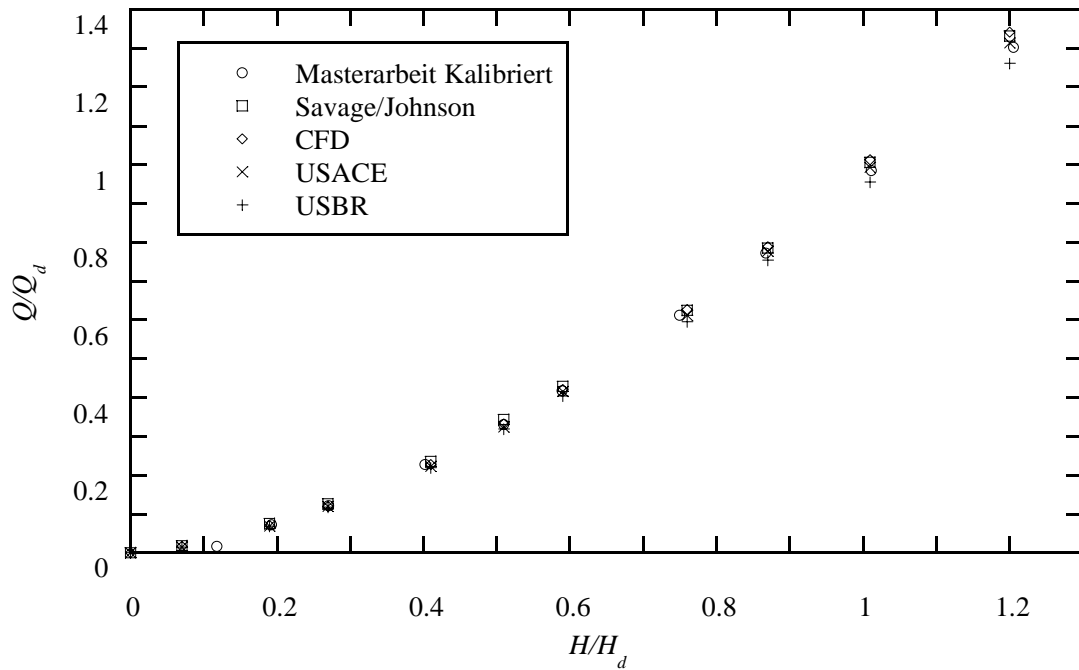


Abbildung 28. Kalibriertes Modell.

Wird die Simulation mit dem neuen Abflussbeiwert wiederholt wird eine noch bessere Korrelation zwischen Numerische Simulationen und Physikalischen Modellversuchen ersichtlich.

5.2 Sensitivitätsanalyse

5.2.1 Bemessungsabflusshöhe

Für die Abflussformel ist H_d die einzige Eingabegrösse. Daher ist es wichtig die Auswirkungen des Wertes auf die Resultate zu untersuchen

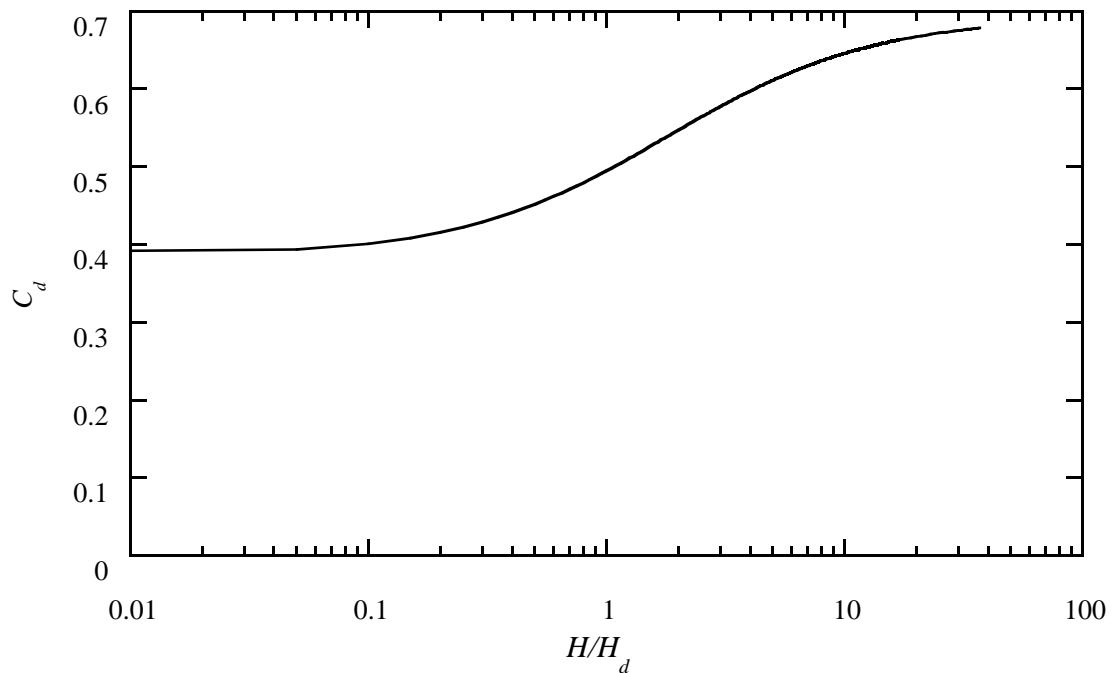


Abbildung 29 Verlauf von C_d als Funktion der dimensionslosen Abflusshöhe. Die X-Achse ist logarithmisch skaliert.

Wie Abbildung 29 zeigt hat C_d zwei Asymptoten. Deswegen kann schon behauptet werden dass eine falsche Wahl von H_d nicht zu katastrophischen Resultaten führen kann.

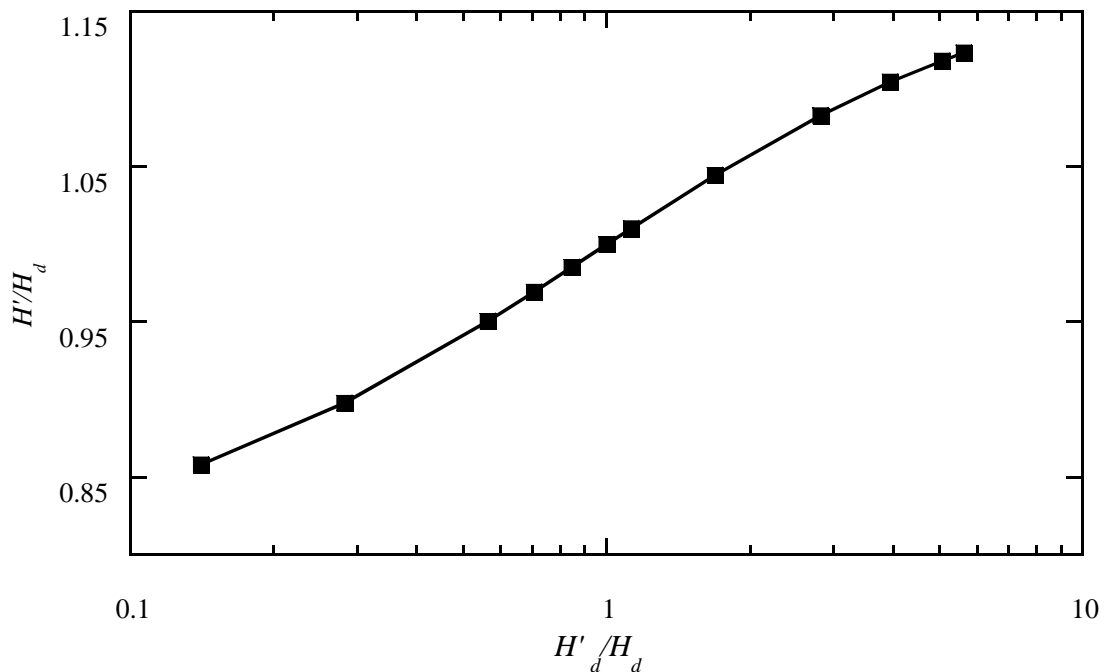


Abbildung 30. Sensitivitätsanalyse. Die X-Achse ist logarithmisch skaliert.

In Abbildung 30 wird dargestellt wie eine falsch gewählte Bemessungsabflusshöhe die Energiehöhe im Oberwasser beeinflusst. Zwölf numerischen Untersuchungen wurden in dem gleichen Modell mit dem gleichen Durchfluss durchgeführt. Für diesen Durchfluss wurde die Bemessungsabflusshöhe H_d eines OGEE-Wehres berechnet. Und ein Versuch mit ihm durchgerechnet. Die anderen elf Punkten sind Resultaten wo ein H' im Oberwasser hat sich bei der Eingabe von einem falschen H'_d wert eingestellt. Die Richtige Bemessungsabflusshöhe H_d für den Abfluss wurde dann benutzt für eine Normierung. Es lässt sich zeigen dass obwohl H_d 6 mal zu klein oder Gross angenommen wurde dann erzeugt es nur einen Fehler von 15% in dem Oberwasserwasserstand.

5.2.2 Reibungsbeiwert

Der Reibungsbeiwert wird häufig in der Praxis als Kalibrierungsgrösse benutzt. Deshalb sollte untersucht werden welchen Einfluss der Reibungsbeiwert nach Manning auf die Resultate der Simulation hat.

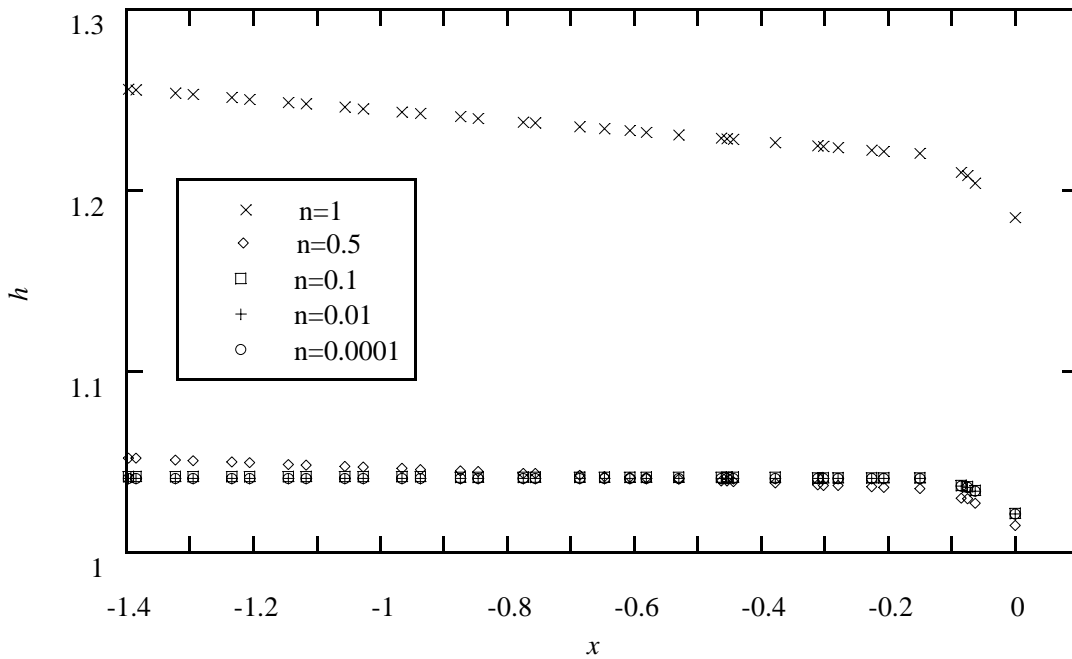


Abbildung 31. Abhängigkeit des Wasserspiegels im Oberwasser von dem Manningsbeiwert.

Glass hat einen Manningsbeiwert von 0.01, Beton 0.013 und eine Flutebene mit Bäumen 0.15 (Chanson 2004). Abbildung 31 zeigt dass bei Manningsbeiwerten innerhalb eines sinnvollen Rahmens keinen grossen Einfluss auf ein Modell von dieser Grösse haben.

6 Praxisanwendung

6.1 Einleitung

Um die Tauglichkeit der Lösung in einem realen Kontext zu Prüfen wurde die Implementierung der Inneren Randbedingung OGEE-Wehr auf zwei Gittern numerischen Untersuchungen geprüft. Die Gitter wurden von Flussbauspezialisten hergestellt und entsprechen den Anforderungen die zu der Inneren Randbedingung in der Praxis gemacht werden könnten.

6.2 Flusskraftwerk 1

Ein klassisches Laufwasserkraftwerk in einem mitteleuropäischen Fließgewässer bildet die Grundlage für diese Simulation. Zwei Lastfälle wurden berechnet, ein Betriebslastfall und ein Hochwasserlastfall. Für beide Lastfälle wurde zu bekannten Pegelständen kalibriert und die Lösungen der Inneren Randbedingung OGEE-Wehr aus dieser Master mit der von der Inneren Randbedingung Inneres Wehr in *BASEMENT* 1.5 verglichen.

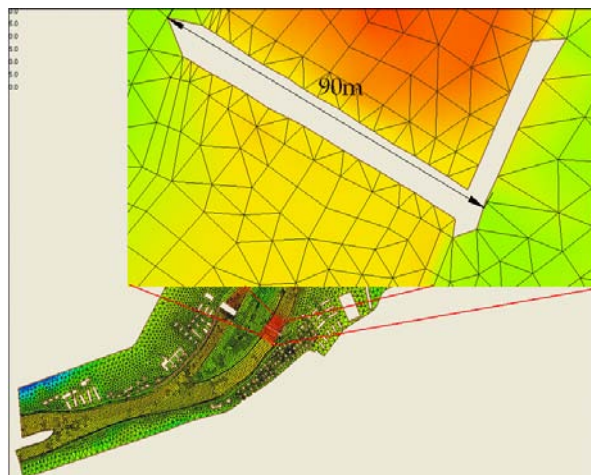


Abbildung 32. Luftaufnahme aus Google Earth und ein Gitter von dem Kraftwerk.

In Abbildung 32 wird dargestellt wie sich der Fluss in zwei Gerinnen aufteilt. Das linke Gerinne geht zum Kraftwerk aber das rechte zum Wehr. Das Wehr ist 90 m Breit.

6.2.1 Betriebslastfall

Der Betriebslastfall entspricht einem Durchfluss von $302 \text{ m}^3/\text{s}$. Davon fließen $292 \text{ m}^3/\text{s}$ durch das Kraftwerk und die übrigen $10 \text{ m}^3/\text{s}$ von Restwasser über ein Einziges Wehrfeld.

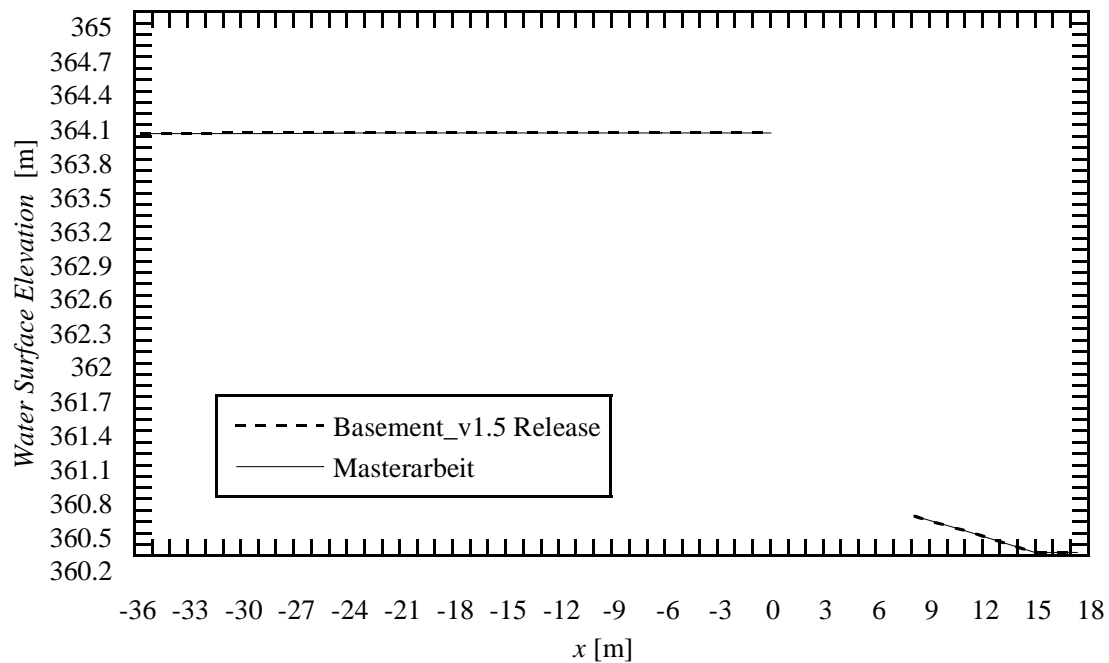


Abbildung 33. Resultate aus der Simulation des Betriebslastfalls.

In Abbildung 33 wird deutlich dass bei so kleinen Abflüssen der Unterschied zwischen den beiden Inneren Randbedingungen kaum zu bemerken ist.

6.2.2 Hochwasserlastfall

Bei dem Zweiten Lastfall handelt es sich um einen Durchfluss von $700 \text{ m}^3/\text{s}$. $340 \text{ m}^3/\text{s}$ fließen durch das Kraftwerk und die $360 \text{ m}^3/\text{s}$ über die ganze Wehrbreite. Das entspricht einem spezifischen Abfluss von $4 \text{ m}^2/\text{s}$ und einer Bemessungsabflusshöhe von 1.5 m.

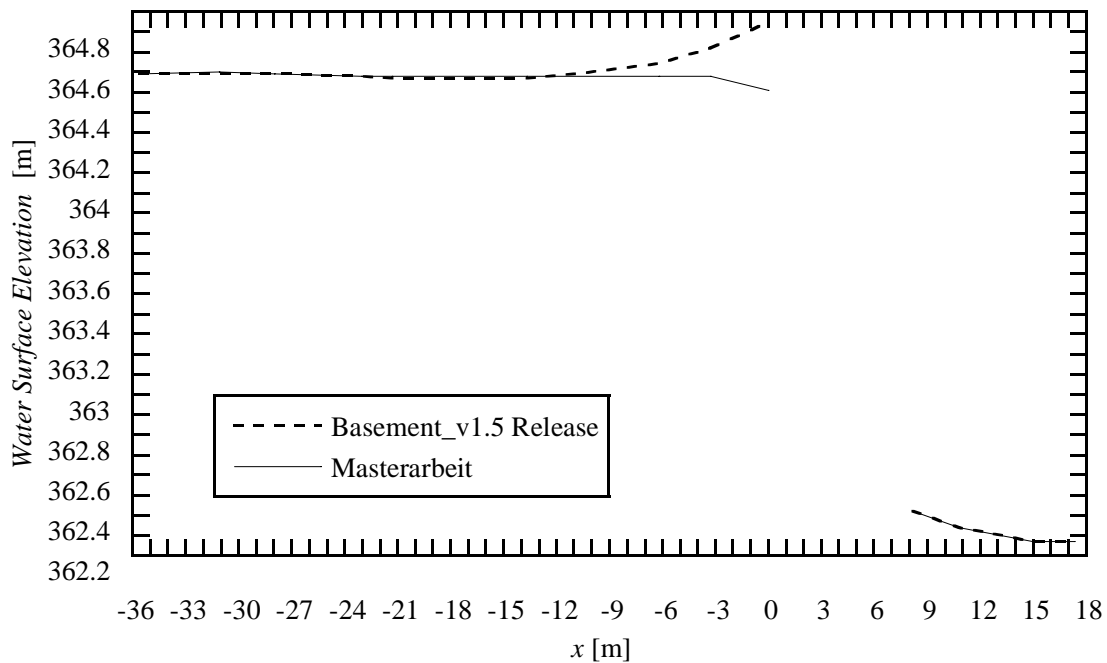


Abbildung 34. Resultate aus der Simulation des Betriebslastfalls.

Bei diesem grösseren Durchfluss wird ein Unterschied zwischen den Inneren Randbedingungen schon deutlich. Die zwei Ergebnisse zeigen vor dem Wehr deutliche unterschiede wo die Ergebnisse der Masterarbeit zeigen den Charakter eines realen Wasserspiegelverlaufes während das andere Resultat sich in der Wehrnähe aufsteigt. Hier wird deutlich wie wichtig es ist, den Momentumflux möglichst richtig nachzubilden

6.3 Flusskraftwerk 2

Beim zweiten Praxisfall handelt es sich um einen Hochwasserlastfall wo 4.000 m³/s fließen durch vier Wehrfelder.

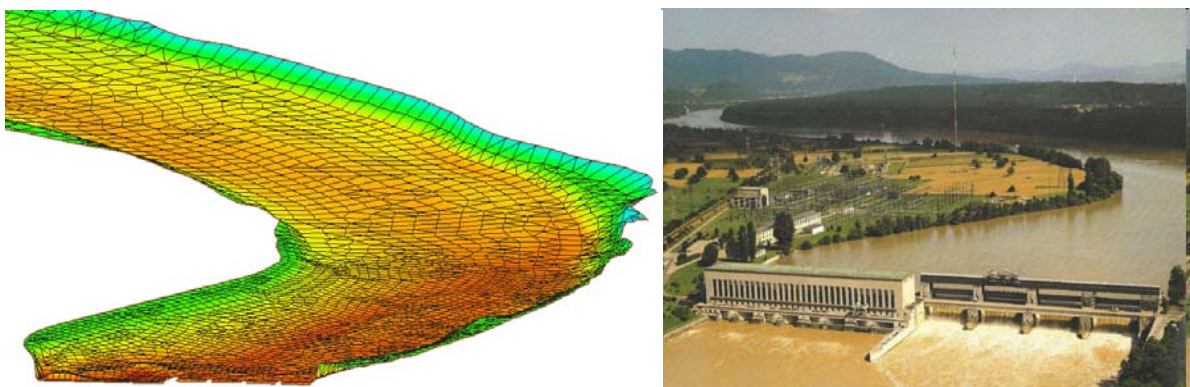


Abbildung 35. Der zweite Praxisfall.

Die Wehrfelder weisen alle eine unterschiedliche Höhe auf und ein einziges Element steuert dem Abfluss durch sie alle.

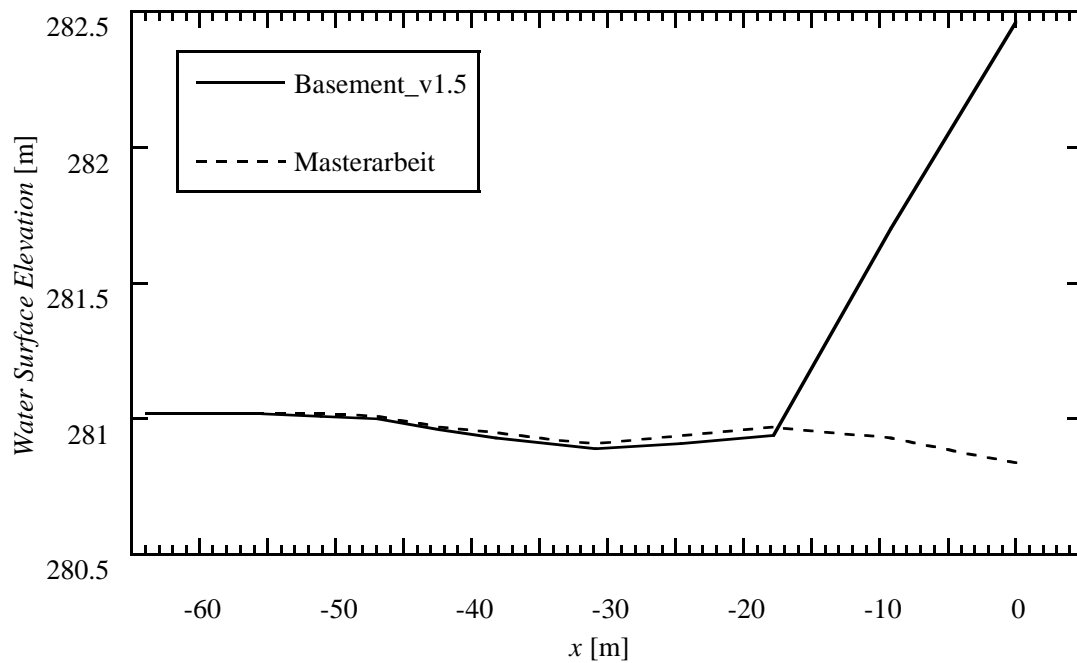


Abbildung 36. Resultate aus der Simulation des zweiten Praxisfalls.

Abbildung 36 zeigt den Verlauf des Wasserspiegels gleich vor dem Wehr. In diesem Fall zeigt sich ein deutlicher Unterschied zwischen den beiden Modellen. Hier ist der Durchfluss noch grösser als bei dem anderen Praxisfall. Hier weicht die Lösung der Releaseversion noch mehr von der Realität ab während die Innere Randbedingung der Masterarbeit immer noch stabil bleibt.

7 Lösungsvorgehen für Innere Randbedingungen

7.1 Allgemeines Lösungsvorgehen für Innere Randbedingungen

In diesem Bericht wurde gezeigt wie ein tiefengemitteltes hydraulisches Modell ergänzt werden kann. Mit der Annahme von Geschwindigkeits- und Druckverteilungen wird versucht zu berechnen was von Impuls und Druck über ein Wehr fliesst. Diese gleiche Methodik kann für andere Ereignisse benutzt werden, wo die Annahmen der Flachwassergleichungen Verletzt sind.

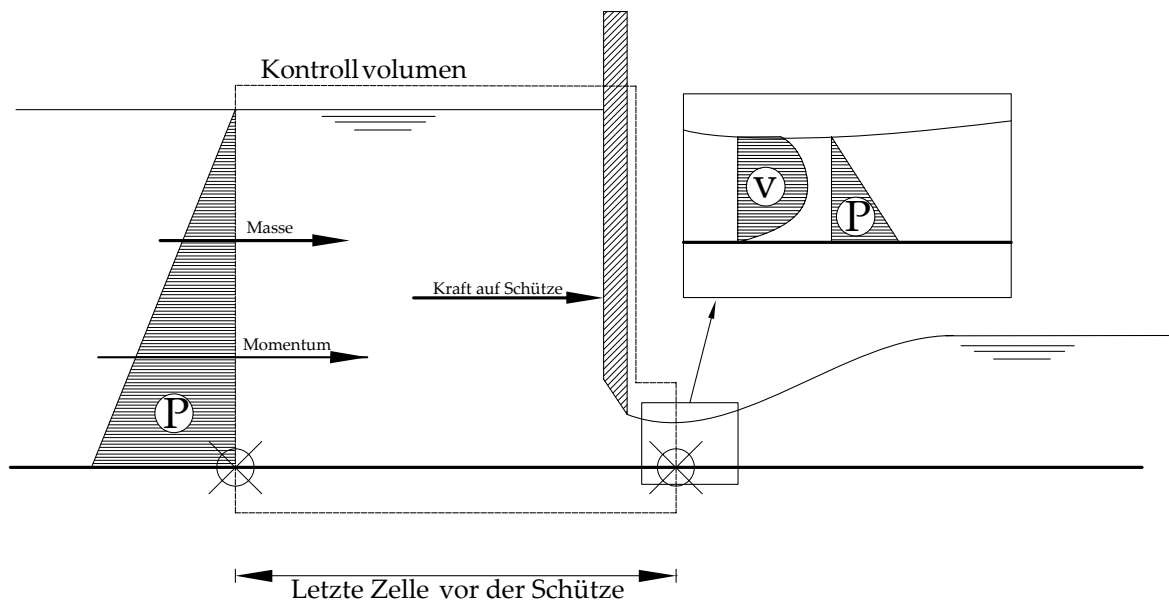


Abbildung 37 Kontrollvolumen und Erhaltungsgrossen für eine allgemeine Lösung.

Ein allgemeines Lösungsvorgehen für innere Randbedingungen lässt sich wie folgt erläutern.

1. Kontrollvolumen in der letzten Zelle vor der Inneren Randbedingung aufstellen
2. Das zu modellierende Objekt günstig eintragen
3. Flüsse in und aus dem Kontrollvolumen und äussere Kräfte eintragen
 - Massenfluss
 - Druck
 - Äussere Kräfte
4. Verteilungen für die Flüsse bestimmen
 - Geschwindigkeitsverteilung
 - Druckverteilung
5. Erhaltungsgrösse als Funktion der Verteilungen: $dm(z)$ und $dp(z)$
6. Integrieren: m und p bestimmen
7. Übrige Kräfte mit dem Stützkraftsatz bestimmen
8. Konzept der Ermittlung der Eingabegrössen bestimmen (Kapitel 4.3.4)

8. Implementieren in den Code
9. Validieren
10. Sensitivitätsanalyse

Mit diesem Vorgehen können Fälle systematisch modelliert werden.

7.2 Übertragung einer Implementierung auf eine andere.

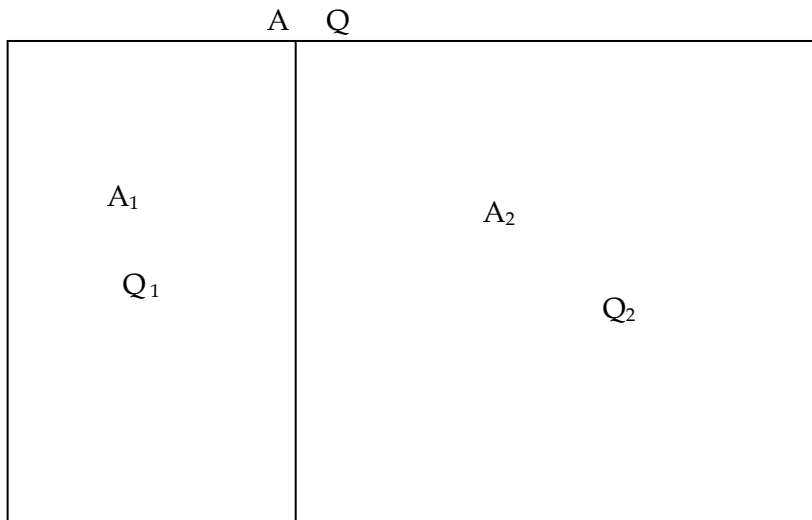
Ob eine schon implementierte Lösung nach dem obigen Verfahren, z.B. von einem OGEE-Wehr als eine andere Innere Randbedingung, z.B. Breitkroniges Wehr eingesetzt werden kann, hängt von den Eigenschaften den beiden Inneren Randbedingungen ab. Jede Implementierung basiert auf gewissen Annahmen, z.B. Abflussvermögen oder Empfindlichkeit gegen den Wasserstand im Unterwasser. Dies muss berücksichtigt werden wenn eine Implementierung einer Wehrtart als eine andere eingesetzt wird.

8 Schlussbemerkungen

Das Mooresche Gesetz sagt aus dass die Leistungsfähigkeit von Rechnern sich alle zwei Jahre Verdoppelt. Damit steigen die erzielbare Genauigkeit und die Grösse des Untersuchungsgebietes. Numerische Modelle eignen sich auch sehr um die Randbedingungen für physikalische Modelle zu bestimmen und gewährleisten damit eine bessere Einbettung in ihre Umgebung. Auch brauchen aber numerische Simulationen eine Validierung durch physikalischen Modellen oder Daten aus der Realität. Beide Verfahren sind jedoch davon ausgeprägt dass nur eine begrenzte Anzahl von Variablen behandelt werden können. In numerischen Methoden werden die Strömungsgrössen bei jedem Gitterpunkt, bzw. Zellenmittelpunkt, berechnet und entspricht das einer Messstelle bei den physikalischen Modellen.

9 Anhang

9.1 Beiweis der Abhängigkeit des Momentumfluxes von der Geschwindigkeitsverteilung



Betrachten wir die Fläche A , die aus den zwei Teilflächen A_1 und A_2 zusammensteht. Durch die Fläche A strömt die Wassermenge Q . Durch jede der Teilflächen Strömt auch ein Teil der ganzen Wassermenge Q . Es gilt:

$$Q_1 + Q_2 = Q \quad (\text{i})$$

und

$$b \cdot Q_1 = Q_2 \quad (\text{ii})$$

Für die Fläche gilt auch

$$A = A_1 + A_2 \quad (\text{iii})$$

und

$$A_2 = c \cdot A_1 \quad (\text{iv})$$

Wo $b, c \in \Re$ sind.

Formulieren wir jetzt den Impuls in jeder Teilfläche und vergleichen mit dem gemittelten Impuls durch die Ganze Fläche A .

$$(ii): \quad Q_1 = \frac{Q_2}{b} \quad (v)$$

$$(iv): \quad A_1 = \frac{A}{1+c} \quad (vi)$$

$$(v) \text{ und } (vi): \quad v_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{\frac{Q}{1+b}}{\frac{A}{1+c}} = \frac{Q}{A} \cdot \frac{1+c}{1+b} \quad (vii)$$

Gibt:

$$\dot{m}_1 = \rho \cdot Q_1 \cdot v_1 = \rho \frac{Q^2}{A} \cdot \frac{1+c}{(1+b)^2} \quad (viii)$$

Auf der gleichen Weise bekommen wir:

$$\dot{m}_2 = \rho \cdot Q_2 \cdot v_2 = \rho \frac{b^2 \cdot Q^2}{c \cdot A} \cdot \frac{1+c}{(1+b)^2} \quad (iix)$$

Die Gemittelte Geschwindigkeit ist:

$$\bar{v} = \frac{Q}{A} \quad (ix)$$

Und dann ist der gemittelte Impuls:

$$(ix): \quad \bar{\dot{m}} = \rho \cdot \frac{Q^2}{A} \quad (x)$$

$\dot{m}_1 + \dot{m}_2$ gibt uns:

$$\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = \rho \frac{Q^2}{A} \cdot \frac{1+c}{(1+b)^2} + \rho \frac{b^2 \cdot Q^2}{c \cdot A} \cdot \frac{1+c}{(1+b)^2} = \rho \frac{Q^2}{A} \cdot \frac{1+c}{(1+b)^2} \left(1 + \frac{b^2}{c}\right) \quad (\text{xi})$$

Setzen wir dann:

$$\bar{\dot{m}} = \dot{m}_1 + \dot{m}_2 \quad (\text{xii})$$

Und berechnen weiter

(x) und (xi) in (xii):

$$\rho \cdot \frac{Q^2}{A} = \rho \frac{Q^2}{A} \cdot \frac{1+c}{(1+b)^2} \left(1 + \frac{b^2}{c}\right) \quad (\text{xii})$$

(xii):

$$1 = \frac{1+c}{(1+b)^2} \left(1 + \frac{b^2}{c}\right) \quad (\text{xiii})$$

Gleichung (xiii) hat nur eine Lösung wenn:

$$b = c \quad (\text{xiv})$$

Das heisst, der Momentumflux durch zwei Querschnitte ist nur gleich der gemittelte Momentumflux wenn der Durchfluss proportional zu den Flächen unterteilt ist. Das heisst, er ist nur gleich sich selbst und keiner anderen Zusammensetzung von b und c .

9.2 Skalierung des gemittelten Momentumfluxes

Skalieren wir den gemittelten Impuls mit Faktor:

$$K \cdot \bar{m} = \dot{m}_1 + \dot{m}_2 \quad (\text{xv})$$

Und berechnen weiter

(x) und (xi) in (xii):

$$K \cdot \rho \cdot \frac{Q^2}{A} = \rho \frac{Q^2}{A} \cdot \frac{1+c}{(1+b)^2} \left(1 + \frac{b^2}{c}\right) \quad (\text{xvi})$$

(xii):

$$K = \frac{1+c}{(1+b)^2} \left(1 + \frac{b^2}{c}\right) \quad (\text{xvii})$$

Das Ergebnis ist das K immer abhängig von der Verteilung des Durchflusses zwischen den Teilflächen. Eine einfache Skalierung mit einer Zahl ist daher nur für eine einzige Zusammensetzung von b und c gültig. Nur wenn eine Funktion von der tatsächlichen Geschwindigkeitsverteilung ist, kann Gleichung (xv) stimmen.

Literaturverzeichnis

- Beffa, Cornel Josef. 2004. *Praktische Lösung der tiefengemittelten Flachwassergleichungen*. VAW, Zürich.
- Bollrich, Gerhard. 2007. „*Technische Hydromechanik Band 1*“. Huss-Medien GmbH, Berlin
- Bourke, Paul. 1987. *Determining if a point lies on the interior of a polygon*.
<http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/geometry/insidepoly/> (21. März 2009)
- Bürgisser, Martin F. und Rutschmann, Peter. „*Numerical Solution of Viscous 2DV Free Surface Flows: Flow over Spillway Crests*“. Laboratory of Hydraulics, Hydrology and Glaciology (VAW), ETH Zürich, Zürich.
- Castro-Orgaz, O. et alii. 2008. „*Critical Flow over Circular Crested Weirs*“ *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Reston, VA
- Castro-Orgaz, O. .2008. „*Curvilinear Flow over Round-Crested Weirs*“ *Journal of Hydraulic Engineering and Research* Vol. 46, No. 4, International Association of Hydraulic Engineering and Research
- Chanson, Hubert. 2004. „*The hydraulics of open channel flow: an introduction*“. Elsevier, Oxford.
- Chunrong, Liu et alii. 2002. „*Numerical and Experimental Investigation of Flow Over a Semicircular Weir*“ *The Chinese Society of Theoretical and Applied Mechanics*, Chinese Journal of Mechanics Press, Beijing, China
- Crowe, Clayton T. 2001. „*Engineering Fluid Mechanics*“. John Wiley and Sons, New York, N.Y.
- Fäh, Roland, et alii. 2008. „*System Manuals of Basement, Version 1.5*“. ETH Zürich, VAW, Zürich.
- Fäh, Roland. 2005. *Vorlesungsmanuskript: Numerische Modellierung von Fließgewässern*. Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Professur für Wasserbau, Zürich
- Halldorsdottir, Berglind Rosa. 2009. „*Hydraulics of Dike Overflow*“ Masters Theses At the ETH Zürich, Zürich (unpublished).
- Johnson, M. C. und Savage, B. M. 2006. „*Physical and Numerical Comparison of Flow over Ogee Spillway in the Presence of Tailwater*“. *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Reston, VA
- Kinzelbach, Wolfgang, Prof. 2008. „*Vorlesungsskript Hydraulik II*“. Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Professur für Grundwasser und Hydromechanik, Zürich.
- Kinzelbach, Wolfgang, Prof. 2008. *Vorlesungsskript Hydraulik I*. Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Professur für Grundwasser und Hydromechanik, Zürich.

- Knapp, F. H. 1960 „*Ausfluss, Überfall und Durchfluss im Wasserbau*“. Verlag G. Braunsche Hofbuchdruckerei und Verlag, Karlsruhe
- Maynard, S. T. 1985. „*General Spillway Investigation*“ Tech. Rep. HL85-1, US Army Waterways Experiment Station, Vicksburg, Mississippi
- Minor, Prof. Dr. H. -E.. 2004. *Wasserbau, Fassung 2004*. Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
- O'Carroll, M. J. und Toro, E. F. 1984. „*Numerical Computations of Critical Flow over a Weir*“. International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 4, John Wiley and Sons, New York, N.Y.
- Tullis, B. P. und Neilson, J. 2008. „*Performance of Submerged OGEE-Crest Weir Head-Discharge Relationships*“ Journal of Hydraulic Engineering. ASCE, Reston, VA
- Wols, Bas, *et alii*. 2006. „*Rapidly varying flow over oblique weirs*“. Proceedings of the 7-th International Conference on HydroScience and Engineering Philadelphia, USA September 10-13, 2006. Drexel University, College of Engineering.
- Savage, Bruce M. und Johnson, Michael C. 2001. „*Flow Over OGEE Spillway: Physical and Numerical Model Case Study*“. Journal of Hydraulic Engineering. ASCE, Reston, VA.
- Skogerboe, G. V., Hyatt, M. L. und Austin, L. H.. 1967. „*Design and Calibration of Submerged Open Channel Flow Measurement Structures Part 4: Weirs.*“ Utah Water Research Laboratory Rep. No. WG31-5, Utah State University, Salt Lake City, Utah
- U.S. Army Corps of Engineers (USACE). 1990. „*Hydraulic Design of Spillways*“. EM 1110-2-1603, Dept of the Army, Washington DC.
- U.S. Bureau of Reclamation. 1977. „*Design of Small Dams*“ U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.
- Vischer, D. L. und Hager, W. H. 1998. „*Dam Hydraulics*“ John Wiley and Sons, Chichester